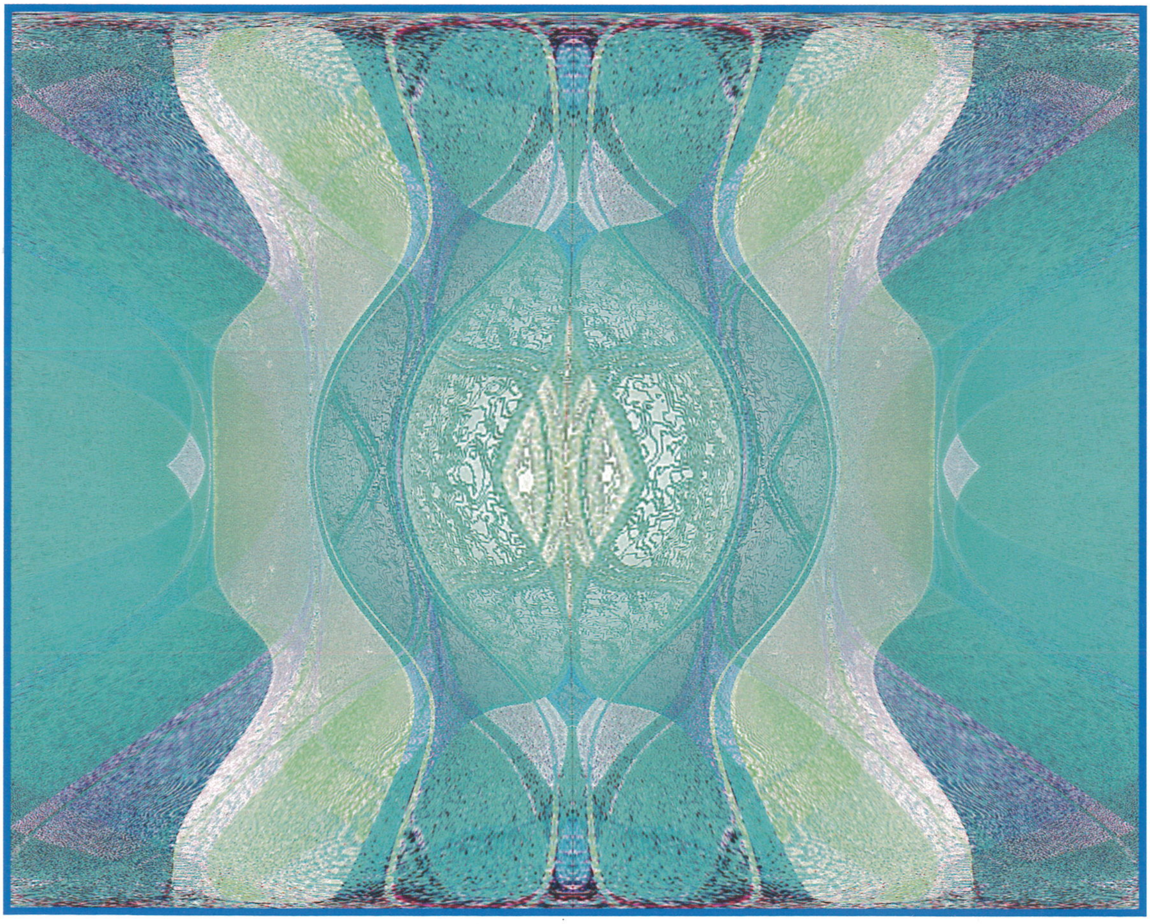
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年6月1日発行　第47巻6号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

6
2009

特集 現象と物理概念を結ぶ方程式



No.552

サイエンス社

／最／新／刊／

シリーズ＜幾何学をみる＞

③ 幾何学への新しい視点
――不確定性と非可換時空

大森英樹 著　　Ａ５変形判　定価 2205 円

「時間」を取り入れた数学の構築という問題を再び提起。教科書スタイルをやめ、雰囲気だけでも理解できるよう工夫した。

●目次　矢は永久に進めない?／水平線って見えるんですか?／曲がってもまっすぐ?／光にとってのまっすぐとは?／カラテオドリーの熱機関社会学／時空が非可換?／勉強すると叱られる?／個数概念は安泰か?／同一人物が二人居る?／普遍的不確定性?／行動群という考え

①トポロジーへの誘い
――多様体と次元をめぐって

松本幸夫 著　　Ａ５変形判　定価 1785 円

多様体が次元によって劇的に変わる様子をやさしく説明する。さらに、ベクトル束と特性類、その後の発展、コラム「数学者の横顔」、索引を追加し、関連記事を収録した。＜増刷出来＞

② １次元代数的特異点とディンキン図形

卜部東介 著　　Ａ５変形判　定価 1890 円

定価は税込

数理物理への誘い４

荒木不二洋 編　　Ａ５判　定価 2520 円

くりこみ群と素粒子論（**青木健一**）／繰り込み群解析（**渡辺 浩**）／相転移と緩和現象（**吉田伸生**）／部分因子環と代数的場の量子論（**泉 正己**）／非可換幾何学と指数定理（**森吉仁志**）／開放系のスペクトル解析――汎関数積分によるアプローチ（**廣島文生**）／スペクトル理論と逆問題（**磯崎 洋**）

●好評既刊【第１～３，５，６集】　定価 2415～2835 円

保険とファイナンスのための確率論
＜増刷出来！＞

黒田耕嗣 著　　Ａ５判　定価 2415 円

アクチュアリーになるための数学を簡明に紹介する。また、ブラック・ショールズの公式を離散確率解析を用いて導く。豊富な例題と分かりやすい説明、さらに演習問題・解答付き。

微分方程式と力学系の理論入門【増補版】

丹羽敏雄 著　　Ｂ５判　定価 3570 円

非線形現象の解析にむけて、具体例と豊富な2色刷り図版で数学が非専門の人にも分かりやすく解説する。増補版では、「数理生物モデル」の話を追加し、参考文献を補充した。

発行 **遊星社**　〒164-0001 東京都中野区中野 3-50-1　Tel. 03-3381-5914
http://www2.odn.ne.jp/yuseisha　振替 00140-5-137657
発売 **星雲社**　Tel. 03-3947-1021　Fax. 03-3947-1617

佐藤・テイト予想と数論

平松豊一・斎藤正顕著／A5判・定価2,730円

佐藤・テイト予想の総合報告書。歴史的概観を与えた後、ラマヌジャンの関数、マースの波動形式、ヒルベルトモジュラー形式の場合を扱う。更にラマヌジャングラフや符号理論との関連に触れ、テイラー等による証明の概略を述べる。

経済・統計分析入門3

フリーランチと金融工学

田畑吉雄著／A5判・定価3,570円

最先端の金融工学では高度な数理的手法を駆使するため、斯学参入への高い障壁となっている。そこで本書は、数学的美しさは余り追求せず、離散モデルに限定した各種資産の性質を説明することにより本来の連続時間モデルへの橋渡しを目指す。

理工系数学の基礎・基本⑧

ベクトル解析の基礎・基本

間下克哉著／A5判・定価1,890円

ガウスの発散定理およびストークスの定理を理解し応用する能力を養うことを目的とした教科書。講義時間数の制約や学習者の予備知識不足を補うべく、必要な基礎数学を予め簡潔にまとめるなど、種々工夫を凝らしている。

理工系数学の基礎・基本⑨

常微分方程式の基礎・基本

宮崎倫子著／A5判・定価1,890円

定数係数2階線形微分方程式に重点をおいた教科書。解法は地道な積分計算に徹することにより解の一意性や重ね合わせの原理などの基本的性質が自ずと理解できるよう配慮。Scilabによる数値解のグラフもプログラムと共に提示する。

★価格は税込

発行＝牧野書店　114-0024東京都北区西ヶ原3-60-18　電話(03)3949-2344　http://www.makinoshoten.co.jp/

発売＝星雲社　112-0012東京都文京区大塚3-21-10　電話(03)3947-1021　FAX.(03)3947-1617

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 552 June 2009

現象と物理概念を結ぶ方程式

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2006 年/8 省略
2006 年/9 ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊 場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007 年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊 双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ

数理科学臨時別冊一覧

07 年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12 計算神経科学への招待
08 年/1 演習 くり込み群
08 年/3 熱方程式で学ぶ逆問題
08 年/5 重力理論講義
08 年/6 代数幾何入門講義
08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数
08 年/11 量子暗号理論の展開
09 年/1 量子力学の考え方

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

June 2009 MATHEMATICAL SCIENCES Number 552

特集／現象と物理概念を結ぶ方程式

方程式の力

現象と概念をつなぐもの

和達　三樹

1. はじめに

様々な自然現象にはそれらを裏付ける原理・法則があり，そのつながりを体系的に理解するための道筋（基礎方程式）が物理の諸分野に存在する．しかし，方程式の発見で物理は終わりではない．基礎方程式は，既知の現象を説明するだけではなく，自然に対する我々の理解をさらに深めてくれる．例えば，マクスウェル方程式は電磁場を記述する方程式であるが，電磁波の存在を予言し，さらにはその背後にはゲージ理論や特殊相対論などの新しい概念が秘められている．本特集「現象と物理概念を結ぶ方程式」では，諸分野での基礎方程式を取り上げ，その意義を確認するとともに，現象と概念がどのような形で関連し発展されるかを見ていきたい．より広い視野からの理解と考察である．

2. 科学的方法

本特集の序論として，科学的手法の構成をまとめ，基礎方程式の役割・位置づけを説明する．

1) 観察，観測，実験　科学は自然の観察から始まった．観察をより一歩進め，自然が引き起こす現象を単に見るだけではなく，それらの性質を測る，すなわち，数値で表すのが観測である．このような定量的研究が始められると，調べるべき試料の作成や観測条件の設定など，自然への能動的な働きかけが工夫され，実験的手法が導入されることとなった．

2) 規則性から法則へ　観察・観測・実験によって自然現象に規則性が見出されると，その規則性をより基本的な視点に立ち返って理解したいと考えるようになる．このような思考法を還元主義といい，近代科学はこの還元主義の方法で成功を収めてきた．物理現象でいえば，関連する諸物理量間の関係を調べることにより物理法則が発見され，それらは基礎方程式としてまとめられている．

3) 普遍性と予測・制御　得られた物理法則や方程式は，既知の事柄をまとめ，説明する．この時，より広い現象を一般的に記述できなくては基本法則，基礎方程式とはいえない．それらの普遍性や適用限界を実験とともに検証することが必要になる．現在の科学技術は，こうして確立された法則，方程式を用いて，物理現象の制御，予測，そして新しい現象の探求を行っている．

まとめると，自然現象 → 原理・法則 → 基礎方程式 → 予測・制御の一連の過程，またはその繰り返しによって，物理の基礎方程式は確立されてきた．言うまでもないが，この科学的方法では，科学の客観性が大前提である．理論的にも実験的にも，誰でもが追試・再現できなくては，真の法則ではない．

3. 物理法則と数学

自然に関する法則を記述する言葉は数学である．数学と物理学の目指すものは同じではないが，物理法則はすべて数学を用いて記述されている．観測の定量化に伴う必然性とも言えるが，さらに深い意味では，数学の言葉で表現すると，物理法則の普遍性が自動的に保証される．特別な場所や時間によらず，同じ法則が成り立つことを自然にかつ客観的に表現できるからである．多くの場合，基礎方程式は微分方程式の形にまとめられる．表 1 には，本特集に登場する物理学の基礎方程式を発見年順にまとめた．

表 1 物理学の基礎方程式．

発見年	方程式	分野
1687	ニュートン方程式	古典力学
1826	ナヴィエ・ストークス方程式	流体力学
1873	マクスウェル方程式	古典電磁気学
1916	アインシュタイン方程式	一般相対性理論
1925	ハイゼンベルグ方程式	量子力学 行列力学
1926	シュレーディンガー方程式	量子力学 波動力学
1928	ディラック方程式	相対論的量子力学
1954	ヤン・ミルズ方程式	ゲージ理論

空間，時間は連続変数であり，物理諸量変化間の関係を微視的に見て表現することにより，微分方程式が導かれる．物理現象の規則性は，対称性の視点から解釈できる．対称性は保存則の存在と密接に関連しており（ネーターの定理，1915 年），基礎方程式の変換不変性によって理解される．ニュートン方程式で言えば（量子力学でも共通），時間並進対称性はエネルギー保存則，空間並進対称性は運動量保存則，回転対称性は角運動量保存則を与える．

4. 基礎方程式の意義

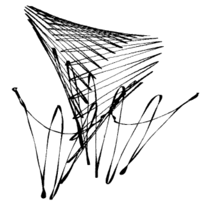
物理法則を記述する基礎方程式が得られたとしよう．この段階で全てが分かり，もう残されたことはないと言えるのであろうか．1 節で少し触れたが，決してそうではないのが物理学の面白い所である．第一に，方程式に秘められた新しい概念，現象がある．ニュートン方程式は 300 年以上前に発見されたが，近年でも多くの進展がある．初期条件に敏感な力学系（カオス，1975），無限自由度の完全積分可能系（ソリトン，1965）など，単に方程式をながめていても見出せない現象であろう．第二に，残された仕事は方程式を解くだけだという視点も正しくない．流体力学のナヴィエ・ストークス方程式では，解の一意性さえも証明されていない．「場」は無限自由度の力学変数であるから，自然界での森羅万象を含んでいるのである．第三に，基礎方程式の成立条件と適用限界を絶えず自問する必要性がある．分かることと分からないことを知り，それらを識別できるのが科学的手法の特徴ともいえる．既に述べた科学的方法の各過程において，客観性が保証されない “理論” はエセ科学である．少し視点を変えて補足すると，物理学では思考実験という手法がある．理論物理は，紙の上の実験ともいえる．現実では得られない高エネルギーの極限，絶対零度での性質，などを調べることにより，理論の適用限界を知るとともに，さらなる発展・拡張を企てることができるのである．

最後になるが，時々「なぜ」を考えてみよう．全体をみる視点と，個々の現象や方程式の解に関する知識をバランスをもって理解してもらいたいからである．一生かかっても解けない「なぜ」から，数日で分かる「なぜ」まで多種多様と思われるが，「なぜ」という知的好奇心とそれを楽しむ心の余裕なしには，「方程式の力」に押しつぶされてしまう．この特集の企画を進めている時，2008 年ノーベル物理学賞を南部陽一郎，小林誠，益川敏英の 3 日本人研究者が受賞するというビッグニュースが届いた．「自発的対称性の破れ」，「CP 対称性の破れの起源発見」に対してである．この知的業績は，学問の素晴らしさを尊重し共有する我が国の文化風土の賜物であり，若い方々にもぜひ受け継いでいただきたいと考える．

（わだち・みき，東京理科大学理学部）

ニュートン方程式

力学四方山話



十河　清

■　1. 力学を学ぶ―私の経験から　■

この「ニュートン方程式」の原稿依頼が私のところに舞い込んだのは，最近「ゼロからの大学物理」シリーズの一つとして『力学 I, II』[1]を書いたばかりなので，執筆経験の感想とか，やむを得ずボツにした事柄など，腹に溜ったものを出させてあげよう，というのが編者の意図と推察している．

力学はすべての物理学の基礎であり，ここから物理学が始まったのではあるが，どちらかというと過去の学問であり，効率よく勉強して次の段階の電磁気学とか量子力学へ進むのが良い，と思われている．確かにそういう側面もあるのだが，なかなかどうして奥が深く，一概に「終わった学問」ともいえないのである．私の経験を振り返りながら，「力学」に対する感じ方の変遷をたどってみたい．

1.1 高校の力学と大学の力学

高校3年のときである．あらかたの問題集をやりつくした私は，変わった問題集はないかと高松市内の書店を物色して，大学生用の力学演習書を見つけて購入した．どの出版社のものであったか覚えていないのだが, 中を読み始めて少々面食らった．第一は「記号法」である．位置 x の微分すなわち速度を表すのに $\dot{x}$，加速度を表すのに $\ddot{x}$ というふうに，いわゆるニュートンの記法を使っている．高校物理では速度は v，加速度は a などと別の文字を使い，例えばボールを鉛直に投げ上げた後の運動は

$$ma = -mg \quad \Longrightarrow \quad a = -g$$

$$\Rightarrow \quad v = v_0 - gt \quad \Rightarrow \quad x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

のように，頭の中で $a = \dot{v}$, $v = \dot{x}$ と置き換えて積分を実行する（あるいは，そのまま覚えてしまう）のが普通である．

ニュートン記法の利点は，一つの表式で速度という変数とそれが位置の微分であることを同時に表すことができる点にある．しかしながら，高校生や入学直後の大学生にとって，この両者の使い分けは，慣れないとわかり難いのも事実である．

高校の力学と大学の力学の違いは，ひとくちに言うと「微分方程式」という考え方の有無であるといえる．そもそもニュートンにとっては，微分積分と力学は一体であったにも拘らず，高校の物理教科書ではそれに触れてはならないという不合理が今もまかり通っている．その結果，例えば速度に比例した抵抗を受けた落下の問題

$$\dot{v} = g - kv, \qquad v(0) = 0 \tag{1}$$

を，大学の期末試験で出題すると

$$v = gt - kvt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{gt}{1 + kt}$$

とする学生が後を絶たない．このタイプの学生は微分と積分が逆演算であること（微積分学の基本定理）および簡単な積分公式は理解しているが，微分方程式という概念およびそれを「解く」とはど

ういうことか，は理解していないのである．この式が正しい解

$$v = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

と一致するのは，$t = 0$ と $t \to \infty$ の 2 点（最初と最後）だけであるのは，ちょっとおもしろい．微分方程式 (1) を解く問題は，学生のこの点に関する理解度を知るのに最適な問題の一つなのである．

高校生の私が面食らったことの第二は，後のほうの節でオイラー・ラグランジュ方程式が議論されていたことである．当時の私には，何をやっているのか訳が分からなかったのはいうまでもない．それを理解したのは，大学に入ってからランダウ・リフシッツ『力学』を読んだときであった．

「変分」の考え方が発見されたのは，ニュートンの遺産を食いつぶしていた英国ではなく，ニュートンの仕事の先を目指した大陸においてであった，といわれる[2)]．**微分方程式**と**変分法**，この 2 つが大学の力学で新しく導入される概念の双璧であろう．

しかしながら，変分という概念は（例を用いて示せばやさしいのであるが）初学者にはわかり難いところがある．オイラー・ラグランジュ方程式の導出は，式変形をしているだけで，一向に「何かを解いている」気がしない，というのである．

こういう一般的な議論に弱いタイプの学生群は確かに存在し，彼らは何の役に立つのかわからない一般論は受け付けないのだ．直ぐに答えが得られる（反射神経だけが要求される）問題に慣れた弊害で，論理の鎖が長くて息の長い議論が不得手なのかも知れない．直角座標と極座標との関係

$$x = r\cos\phi \;\Rightarrow\; \dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi,$$
$$y = r\sin\phi \;\Rightarrow\; \dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi$$

も同様で，微分法の性質（積の微分と合成関数の微分）だけを使っており，具体的に微分を実行しているわけではないからである．

そういう事情から，『力学 I』では，力学と微分積分を平行して導入することを主たる目標とし，「変分と最小作用の原理」には意図的に言及しないことにした．これが良い選択であったかどうかは，読者の評価を待つ他はない．

1.2 「ニュートン力学の形成について」

さて，その頃までには物理学科への進学を考えていたのだが，級友の一人があるとき「物理をやるなら，武谷三男『弁証法の諸問題』[3)]くらい読んでおかなきゃ」とのたまった．当時の私は「弁償法が物理とどう関係するんだ」と思ったくらい無知であったが，この友人も本当にそれを読んでいたのかどうかは定かでない．高校 3 年は背伸びする時期なのである．

弁償法が弁証法の間違いで，ソクラテスの産婆術に始まりヘーゲルの弁証法を経て，マルクス・エンゲルスの唯物弁証法に至ったものだという概略を，倫理・社会の教科書を通して知った．冬休みに兄が帰省したときに『弁証法の諸問題』を知っているかと聞くと，持っているから無事に東京へ出て来れたら貸してやろうという．おまけに「本人に会わせてやる」とのたまうではないか．医学生の兄がどうして面識があるのか不思議だったが，東京へ出てその謎が解けた．何のことはない，兄は武谷先生のご子息と大学で同級だったのである．

個人的な経緯はさておき，その『弁証法の諸問題』についてである．これは戦前・戦中に書かれた諸論文を集めたもので，なかでも「ニュートン力学の形成について」は圧巻である．これは，力学の発展史を分析して，ティコ・ブラーエの現象論，ケプラーの実体論を経てニュートンの本質論へ進んだという，いわゆる「三段階論」を提示したものである．

後になって A. コイレのものや T. クーンなども読んだが，武谷論文は短いけれどもそれらより数段優れていると思う．どこが偉いといって

現在の問題を解くために，歴史から学ぶ

という姿勢がすばらしいと思うのである．もちろん，その問題とは「湯川中間子論」であったわけであるが．

こんど読み返してみて，連想したのは数学者ヴェイユによる同趣旨の文章である．「数学史：「何故に？」および「如何にして？」」と題された論文[4)]

がそれで，いくつかの数学史に関する著作もあるヴェイユによれば，現役の数学者が史的な著作を読むのは「独創的な思索を喚起されんがため」であるという．両者を比較すると，武谷に比べてヴェイユはよりプラグマティックではあるが，目的と戦略は共通していると思う．どちらもご一読をお勧めする．

1.3 ニュートン力学の形成と発展

『力学I』の「ニュートンの3法則」部分を書くにあたって，念のためガリレイやニュートンの著作にも目を通してみた．もちろん以前に読んだものもあるのだが，それらに関する四方山話を書いてみたい．

まずは**ガリレイ**について．これに関しては，豊田利幸先生による世界の名著本の解説「ガリレオの生涯と科学的業績」[5]がたいへんすばらしい．200ページを超える大作で，これ自身が名著である．ガリレイによる「相対性原理（＝ニュートンの第1法則）」および「仕事の原理」の重要性や，日常語を物理的議論に使うことなど，参考にさせて頂いたことは多い．

豊田先生の解説は，歴史的背景を含めたガリレイの生涯を，いくつかの興味深い一次資料の翻訳を付して詳述するのみならず，彼の死後のイタリアの科学界や弟子たちの動向も含めた周到な論文である．

さらに特筆すべきは，ホイヘンスについて20ページ以上を割いて記述していることである．ホイヘンスは彼の名を冠した「ホイヘンスの原理」で有名ではあるが，彼が実際に何をしたのかについては，あまり知られていない．アーノルドの本[6]には「ニュートンやライプニッツと同じ問題を解きながら，いつも幾分彼らを凌駕していたが解析学を全く使わなかったホイヘンス」という，たいへん意味深長な文章があるが，豊田先生による「光についての論考」の抄訳は，その疑問に部分的に答えてくれるものである．より広範な読者を対象に，どこかの出版社によって独立して出版されることを希望したい．

つぎは**ニュートン**について．ニュートンの主著『プリンキピア』が，同じく世界の名著に河辺六男先生によるラテン語原典からの翻訳があるのは喜ばしいことである．

ニュートンは，逆2乗則と楕円軌道の関係を含む主な結果を，『プリンキピア』出版の20年近く前に微積分学の手法で得ていたといわれている（逆2乗則だけなら，ケプラーの第3法則から次元解析によっても導出できる）．にも拘らず『プリンキピア』では，その論証はすべて幾何学的な言葉で定式化されている．その理由として，1) 微積分学についてニュートン自身がその全貌を公開していないので，一般に馴染みがないこと，2) 当時は「ユークリッド的」といえば厳密さの代名詞であったこと，などが挙げられている．

いずれにしても，幾何学よりは微積分に馴染みのある現代の読者にとって，読み難いことは事実である．実際『プリンキピア』の各命題を解析学の言葉で書き直した本まで存在する．その他にも，ファインマンによる講義録[8]とか，チャンドラセカールによる講義録[9]などもある．特に後者は主な命題について，現代風に著者自身で解き直すという試みから生まれた本で，大部ではあるがたいへん示唆に富んだものである．例えば，既出のアーノルドの本[6]にもある「ケプラー運動と2次元調和振動との双対性」の問題（後述する）についても，議論されている．

ニュートン以後の力学の発展については，**オイラー・ラグランジュ**と**ハミルトン**の業績を挙げなくてはならない．前者は，既に述べたニュートン力学の変分原理による再定式化である．

既に書いたように，変分のアイデアは「大陸発」というのが通説であるが，チャンドラセカール本[9]によれば，ベルヌーイによる「最速降下線の問題」（有名な変分問題）を問われたニュートンは，即座に正解を返答したという．ニュートンは，時代をはるかに超えた概念と知見を密かに有していた，というのがチャンドラセカールの判定である．

ハミルトンは，正準運動方程式の定式化によって，大陸に遅れをとっていた英国に再び解析学の先進国の地位を取り戻した．その概念体系は，現

代数学において「シンプレクティック幾何学」へと発展している．また，物理学においても再び，分子動力学や非平衡熱統計力学に，その新たな展開を見せている．

2. ケプラー運動再考

太陽重力の下での惑星の運動を求めること，すなわちケプラー問題を解くことは，力学のハイライトの一つである．運動方程式に基づいて，ケプラーの 3 法則すなわち 1) 楕円軌道，2) 面積速度一定，3) 公転周期が長半径の 3/2 乗に比例，の 3 つの性質を導くことは，『力学 II』の目標の一つであった．これに関してやむを得ず省略した事柄がある．時々刻々の位置座標を時間の関数として具体的に表す問題である．普通の教科書ではあまり記述されない事項であるが，おもしろい問題なので，以下に概略を書いてみよう．

2.1 ケプラー・レビチビタ変数 ξ

結論を先に書くと，ケプラー・レビチビタ変数とよばれるパラメータ変数 ξ を用いて，これらは間接的に表現できるのである．天下り的であるが，まず実時間 t と変数 ξ との対応を

$$\omega t = \xi - \varepsilon \sin\xi, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

で与える．ここで，$T = 2\pi\sqrt{a^3/GM}$ は公転周期，ε は離心率，a は長半径である．このとき，動径 r と角度 ϕ は

$$r = a(1-\varepsilon\cos\xi), \tag{3}$$

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\left(\frac{\xi}{2}\right) \tag{4}$$

と書かれる．

図 1 は 1 周期を等分割したときの各 t に対する ξ の値を式 (2) から求め，それを式 (3), (4) に代入した後，$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ をプロットしたものである．近日点では速く，遠日点では遅く運動していることがよくわかる．常微分方程式を差分化して数値的に解く場合とは異なり，正確な解を描画しているだけなので，軌道が閉じないとか発散するといった数値不安定はないことに注意．

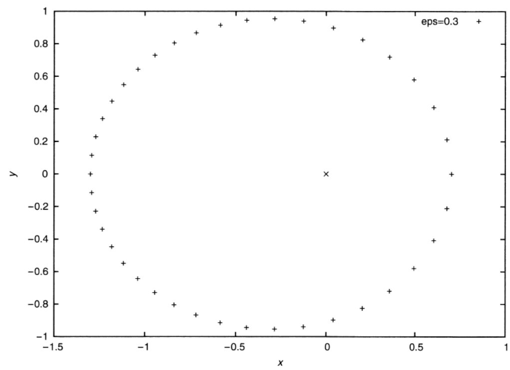


図 1　離心率 $\varepsilon = 0.3$ のケプラー運動．

以上の関係式は，例えば次のようにして確かめられる．角運動量保存則

$$r^2\dot{\phi} = h \tag{5}$$

と式 (2), (3) より

$$\begin{aligned}\phi &= \int_0^t \frac{h}{r^2}dt = \int_0^\xi \frac{h}{r^2}\frac{dt}{d\xi}d\xi \\ &= \frac{hT}{2\pi a^2}\int_0^\xi \frac{d\xi}{1-\varepsilon\cos\xi} \\ &= 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

として，式 (4) が示される．ここで，積分公式 (岩波『数学公式 I』P.189)

$$\int_0^\xi \frac{d\xi}{1-\varepsilon\cos\xi} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\times \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)$$

と等式 $hT = 2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$ を用いた．

2.2 ケプラー運動と 2 次元調和振動

変数 ξ の持つ不思議な意味は，前節に述べたケプラー運動と 2 次元調和振動との間の双対性を考えると，より一層あらわになる．2 次元調和振動の運動方程式

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = -\Omega^2 X, \qquad \frac{d^2Y}{d\tau^2} = -\Omega^2 Y \tag{6}$$

の解を

$$
\begin{cases} X = a\sqrt{1-\varepsilon}\ \cos(\Omega\tau), \\ Y = a\sqrt{1+\varepsilon}\ \sin(\Omega\tau) \end{cases} \tag{7}
$$

とする．すると $\xi = 2\Omega\tau$ として，2 次元調和振動の極座標変数 R, Φ からケプラー運動の極座標変数 r, ϕ への変換を

$$
ar = R^2, \qquad \phi = 2\Phi \tag{8}
$$

で定める．このとき

$$
\begin{aligned} R^2 &= X^2 + Y^2 = a^2(1-\varepsilon\cos\xi) \\ &= ar \quad \Longrightarrow \quad r = a(1-\varepsilon\cos\xi) \end{aligned}
$$

および

$$
\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \tan\Phi = \frac{Y}{X} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\left(\frac{\xi}{2}\right)
$$

を得る．これらはケプラー運動の解 (3), (4) に他ならない．言い換えると，変数 $\xi = 2\Omega\tau$ は，本質的に 2 次元調和振動の「時間変数」なのである．

2 次元調和振動とケプラー運動の間の変換 (8) は，複素数表示すれば，さらに簡潔に

$$
(X+iY)^2 = a(x+iy) \tag{9}
$$

と表される．これを「ボーリン変換」という[6]．

一般に，2 つの中心力ポテンシャルのベキ指数 m, n について

$$
(m+2)(n+2) = 4 \tag{10}
$$

を満たす 2 つのモデルは互いに双対となり，解は互いにベキ的な複素変換によって移りあう．ケプラー運動（$m=-1$）と 2 次元調和振動（$n=2$）は，その特別な場合なのである．

2.3 ケプラー運動と双曲幾何学

変数 ξ に微分幾何学者レビチビタの名前が付いているのは以下のような事情による[10]．離心率 ε が 1 より大きいときは，軌道は双曲線になる．このとき，前節の式は変数 ξ を形式的に $\xi \to i\xi$ と置き換えればそのまま成り立つ．このとき $\cos(i\xi) = \cosh\xi$, $\sin(i\xi) = i\sinh\xi$ 等を使う．すなわち，$\varepsilon > 1$ のときは

$$t = \frac{l^2}{h(\varepsilon^2-1)^{3/2}}(-\xi + \varepsilon \sinh\xi) \tag{11}$$

として

$$r = \frac{l}{\varepsilon^2-1}(-1+\varepsilon\cosh\xi), \tag{12}$$

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right) \tag{13}$$

と書かれる．このとき，式 (11), (12) から

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{l}{h(\varepsilon^2-1)^{1/2}}\cdot r \tag{14}$$

が成り立つ．また，運動方程式より

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right| = \frac{GM}{r^2}$$

であるから

$$\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{d\xi}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\xi}\right| = \frac{l}{h(\varepsilon^2-1)^{1/2}}\frac{GM}{r}$$
$$= \frac{l}{h(\varepsilon^2-1)^{1/2}}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 - E\right) \tag{15}$$

を得る．ここで，エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 - \frac{GM}{r} = E \tag{16}$$

を用いた．したがって，新しい従属変数 $\boldsymbol{w}$ を

$$\boldsymbol{w} = \sqrt{2E}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2} \tag{17}$$

により導入すると，$|\boldsymbol{w}||\boldsymbol{v}| = \sqrt{2E} =$ 一定 ゆえ $|d\boldsymbol{w}| = \sqrt{2E}\cdot|d\boldsymbol{v}|\,/\,|\boldsymbol{v}|^2$ となるから，式 (15) は

$$d\xi^2 = \frac{4\,|d\boldsymbol{w}|^2}{(1-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})^2} \tag{18}$$

と書き換えられる．ここで $h^2 = GMl$, $E = GM(\varepsilon^2-1)/2l$ を用いた．

式 (18) はガウス曲率 $K=-1$ を持つ曲面の計量の式に他ならない（双曲幾何学のポアンカレ模型）．変数 ξ は，そのときの「固有時」を意味している．

このとき，ケプラー運動の双曲線軌道は

$$\boldsymbol{w} = \frac{\left(\sinh\xi,\ \sqrt{\varepsilon^2-1}\cosh\xi\right)}{1+\varepsilon\cosh\xi} \tag{19}$$

に写像されることがわかる．

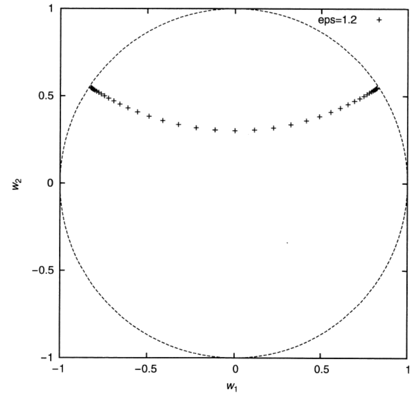


図 2　離心率 $\varepsilon = 1.2$ のケプラー運動．

これは，図 2 に見るように，ポアンカレ円板内に描かれた次のような測地線を表している．

$$w_1^2 + \left(w_2 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2-1}.$$

ケプラー運動と双曲幾何学との間にある，以上のような関係，すなわち

ケプラー軌道は曲がった空間の測地線である

ことを発見したのが，レビチビタなのである．

3. おわりに

3.1 書き残したこと

じつを言うと，もう一つ『力学 II』で腐心したのは，コマの運動に関する記述である．保存量などの対称コマの定性的性質は示したのだが，定量的な解そのものは，楕円関数の導入を必要とすることを理由に断念したのである．

対称コマの運動は『力学 II』でも示したように，運動座標系とオイラー角を用いた通常の取り扱いよりも，慣性座標系での記述のほうが簡単になる．

これらの話題についても，ここで述べたいのではあるが，残念ながら与えられた紙数が尽きてしまっている．手前味噌の文献だけを挙げて[11)]，別の機会にしたい．

3.2 再び私の経験から

ご他聞にもれず学生時代の私も，古典力学よりは量子力学のほうが「高尚な学問」であると思っ

ていた．実際，古典統計力学よりは量子統計力学を，古典可積分系よりは量子可積分系をと，古典系の充分な理解をなおざりにしてまで，新奇なものを追い求めてきたようである．

近頃になってようやく，もう少し広い視野でものごとを見ることができるようになったらしい．もちろん今でも量子可積分系に残された重要な問題は多いが，古典可積分系にもおもしろい問題はたくさんあることに気付いたのである．さらには，可積分性にこだわる必要もなく，興味を引かれる問題が次々と目に入るのである．

若い人たちが新しい事柄に興味を持つのは，当然のことである．それなくして学問は進展しない．先輩風を吹かして忠告するとすれば，古典だとか量子だとかの分類に捕われることなく

良い問題に対するセンス

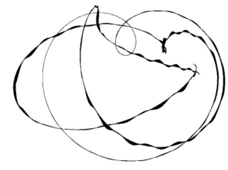
を磨いて欲しい，ということである．どうすれば，それが得られるかって？ それには，良い問題をたくさん見ることに尽きる．

参考文献

1) 十河清・和達三樹・出口哲生『ゼロからの力学 I, II』（岩波書店，2005）．
2) W. Yourgrau and S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory* (Dover, 1968).
3) 武谷三男『弁証法の諸問題』（勁草書房，1968）．
4) A. ヴェイユ（足立・三宅訳）『数論：歴史からのアプローチ』（日本評論社，1987）に所載．
5) 豊田利幸編訳『ガリレオ』（世界の名著 21，中央公論社，1973）．
6) V.I. アーノルド（蟹江訳）『数理解析のパイオニアたち』（シュプリンガー・ジャパン，1999）．
7) 河辺六男編訳『ニュートン』（世界の名著 26，中央公論社，1971）．
8) D.L. グッドスティーン他（砂川訳）『ファインマンさん，力学を語る』（岩波書店，1996）．
9) S. チャンドラセカール（中村編）『プリンキピア講義』（講談社，1998）．
10) J. ミルナー「ケプラーの復活」（山下訳『ガロアの神話』（現代数学社，1990）所載）．
11) K. Sogo, *J. Phys. Soc. Japan* **77** (2008) 084002.

（そごう・きよし，北里大学理学部）

マックスウェル方程式
その考え方と物理における意味



米谷 民明

古典力学にとってニュートンの運動方程式がそうであるように，電気・磁気の基本法則がマックスウェル方程式である．まずその考え方について解説し，さらに物理学における意味を展望する．

1. 電場と磁場

電気を帯びた粒子（荷電粒子）は，位置が離れていても互いどうし力を及ぼしあう．重力＝万有引力の場合にニュートンが定式化したように，直接無媒介に働く力（遠隔作用力）と理解してもよいが，電磁気現象が様々な仕方で互いに絡みあっていることを普遍的な法則として整理するには，作用を仲介する役割をもつ場の概念が欠かせない．粒子が電気磁気により相互作用しているとき，一方（番号 1 で表す）の電荷 e_1 のために空間にある種の「歪み」が生じる．もう一方の粒子（番号 2 で表す）がこの歪みを検知して電荷 e_2 に対して力が作用（近接作用力と呼ぶ）すると考える．その強さは源から離れるに従って弱まるし，作用の向きは位置によって違う．つまり，歪みは位置および時間の関数としてのベクトルによって表せる．このような「歪み」を力の「場」と呼ぶ．静止した電荷間に働くクーロン力は，正負の向きを別にすると万有引力と似ているから，単に表現の仕方の違いにすぎないように思えるが，荷電粒子が運動しだすと，2 つの見方には大きな違いが出てくる．現代では，重力を含めて自然界のすべての力は場に基づき定式化されている．重力場でマックスウェルの方程式に当たるのは，アインシュタインの重力場の方程式である．重力場は時間空間の幾何学の歪みを記述しているので，抽象的な電場・磁場（あわせて電磁場）よりむしろ理解しやすい．

電磁場の正確な定義はあくまでも粒子に働く力による．場を検出するときに場の源の状態を変化させないように，十分に弱くまた広がりが限りなく狭い領域（点）に局在した電荷 q を持つ質点を用意する．これを試験電荷と呼ぶ．試験電荷の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$，測定する時刻を t とする．測定は十分短い時間と空間の間隔で理想的に行われるものとするのである．試験電荷にかかる力は

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\right) \tag{1}$$

と表せる．これを**ローレンツの力**の法則と呼ぶ．電場 $\boldsymbol{E}$ を決めるには，粒子の速度 $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{x}/dt$ をゼロにして測る．電場が決まっているとき，速度に依存する力も測定することにより磁場 $\boldsymbol{B}$ を決定できる．第 2 項の積記号はベクトル積である[*1]．

単位系はいわゆる MKSA 単位系を採用する．A は電荷の単位が電流の単位（通称「アンペア」）をもとに定義されていることを意味する．電流は，単位時間当たり単位面積を通過する電荷量（電流密度）だから，電荷の単位が定まる．電流密度を正電荷が流れる向きのベクトルとみなし $\boldsymbol{j}$ で表す．ある面 S を通過する電流 I は積分 $I = \int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{j}$ である．ここで面積要素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ は，面上の各点の微小面積要素の大きさをもちそれに垂直な方向のベクトルである．

静止した n 個の荷電粒子（電荷 e_i，位置 $\boldsymbol{x}_i, i = 1,2,\ldots,n$）による電場を

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|^3} \tag{2}$$

*1) 多くの教科書で「磁場」は，$\boldsymbol{B}$ を真空の透磁率と呼ばれる定数 $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ で割った $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0$ のことである．このとき，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度と呼ばれる．これは単に慣習にすぎず，試験電荷に対するローレンツの力に基づいて場を定義する立場からは $\boldsymbol{B}$ を磁場を呼ぶほうが自然であるので，この解説では無用の煩雑さを避けるためこの呼称を採用することにする．

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3y \frac{\rho(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3} \tag{3}$$

と表す．定数 ϵ_0 は真空の誘電率と呼ばれる定数で，真空の透磁率 μ_0 と光の伝播速度の大きさ c により $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ と決まっている．何故，光の速度が出てくるのかは，まさにマックスウェル方程式に起源があるのである．ここで2行目は，電荷分布を単位体積当たりの電荷量つまり電荷密度 ρ により体積積分で表している．ディラックのデルタ関数（3次元）を知っている読者は

$$\rho(\boldsymbol{y},t) = \sum_{i=1}^{n} e_i \delta^3(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_i(t)) \tag{4}$$

と書けば，2つの表示が同等であることがわかるだろう．このとき，荷電粒子は静止しているとしているから実際には電場は時間によらない．一般に粒子が運動しているとすると電流密度は

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y},t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\boldsymbol{x}_i}{dt}\delta^3(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_i(t)) \tag{5}$$

である．

2. マックスウェル方程式

マックスウェル方程式に進もう．まず，積分を用いた形式では

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V d^3y\,\rho, \tag{6}$$

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{7}$$

$$\oint_{\partial S} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E} = -\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{8}$$

$$\oint_{\partial S} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B} = \mu_0\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\left(\boldsymbol{j}+\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right). \tag{9}$$

記号 ∂V は任意の3次元領域 V の境界としての閉曲面を表す．(6), (7) 左辺の面積積分における面積要素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ は，外側向き法線方向を向いていると約束してある．また，(8), (9) 左辺の線積分は，右辺に現れている任意の有限面 S の境界としての閉曲線 ∂S に沿う周回積分である．その向きは，右辺の面積要素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ を定めたとき，ねじがその向きに進むように回転させたときの回転方向に等しいと約束する（右ねじの規則）．

一般のベクトル場 $\boldsymbol{C}$ について成り立つ公式 $\int_{\partial V} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{C} = \int_V d^3y\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{C}$ （ガウスの公式），
$\int_{\partial S} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{C} = \int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{C}$ （ストークスの公式）を用いて，微分方程式としても表せる．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{j}+\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right). \tag{13}$$

(6), (10) は，電場の源が電荷であり，正電荷から外側向き，負電荷からは内向きの電場が生じること（**ガウスの法則**）を表している．電場に沿った方向を向き，その強さに比例する長さのベクトルを空間の各点に描くと，電場の様子は正電荷から湧き出し負電荷に引き込まれる曲線（電気力線）の束として表せる．(7), (11) は，磁場を同じように磁力線で表すと，磁力線には始めも終わりもないことを示している．磁場の場合には電場に対する電荷に当たる磁荷は存在しない．

では磁場は何によって生じるか．それを示しているのが (9), (13) である．磁場が電流に巻き付くように生じることを表している（**アンペールの法則**）．電流の向きをねじの進む方向としたとき，磁力線はねじの回転方向にできる．例えば，強さ I の電流が長く細い直線の電線に流れているとき，電線から距離 r の位置にその半径の円周に沿って強さ $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ の磁場ができる．右辺第2項は電場の時間変動も電流と同じように磁場の生成に寄与することを表している．この意味で $\epsilon_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ を**変位電流**密度ベクトルと呼ぶ．これを理解すれば，(8), (12) の意味も明らかになる．磁場の時間変動によっても，電場が右ねじの規則と逆方向に生成されるわけである．次のように言い換えてもよい．磁場の変動によって生じる電場の向きは，生じる電場の向きに電流が流れるのを想像したとき，それによって誘導される磁場が，元の磁場の変化を妨げる向きにできる（**電磁誘導の法則**）．

これらの方程式は独立ではなく関連しあっている．(8), (9) の左辺は，閉曲線 ∂S に沿って取るが，右辺の面積積分の面 S は一意的に定まらず，無限に存在する．面の境界＝縁を固定しても，面の中のほうはいくらでも変形できるからである．同じ境界を持つ任意の面を用いても右辺が同じ結果を与えるようになっていなければ無意味な式になってしまう．この事情は微分形では (12), (13) の左辺が任意のベクトル場について成立する恒等式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{C}) = 0$ により，演算 $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ の下でゼロになることに対応する．つまり，これらの式が整合的であるには条件式

$$\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \tag{14}$$

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) = 0 \tag{15}$$

が成り立たなければならない．ガウスの公式により示せるように，積分で表せば (8), (9) の右辺が面の選び方によらないための条件に他ならない．(14) は明らかに (11) によって保証されている．一方，(15) は (10) を用いると，もし

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

が成り立っていれば保証できる．この式の積分形は

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \tag{17}$$

であり，任意の 3 次元の領域 V から単位時間当たり湧き出てゆく電荷量がその領域に存在する電荷量の時間減少率に等しいことを要請している．これは電荷が保存している，つまり，電荷を運ぶ粒子の移動以外の理由では領域 V の電荷量の変化が起きないとすると成り立つ．実際，電荷の値は，電子，クォークなどの基本粒子がもっている固有の性質であるから，常に成り立っている．(4), (5) は確かに (16) を満たす．素粒子のレベルでは実は，基本粒子は互いに転化し得るのだが，その場合でも電荷は厳密に保存する．例えば，電子と同じ電荷を持ち質量が電子のおよそ 200 倍のミュー粒子が存在する．ミュー粒子は電子と電気的に中性のニュートリノ—反ニュートリノの対に崩壊するが，その前後で電荷は変化しない．

こうして，マックスウェル方程式は**電荷保存の法則** (16), (17) と併せて整合的である．だが，それだけではまだ閉じた方程式とは言えない．ローレンツ力により電磁場の源自体が影響を受ける．マックスウェル方程式は，物質粒子の運動方程式と連立させて初めて閉じた方程式系を形成するのである．物質粒子の運動と電磁場を同時に取り扱うとき，全体の力学を電気力学と呼ぶ．

3. マックスウェル方程式と電磁波

もし，全くの真空で物質が存在しない空間時間の領域で考えれば $\rho = 0, \boldsymbol{j} = 0$ と置ける．しかし電磁場は一般にゼロとは限らない．時間変動している場合には，電場の時間変動が磁場の空間変動を，また磁場の時間変動が電場の空間変動を引き起こすという構造になっていることから予想されるように，電磁場は真空中でも波として遠くへ伝播してゆく．真空中の式として書くと

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{18}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \ \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{19}$$

である．最後の式で $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ を用いた．公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{C}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{C}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{C}$ と，(19) の両辺に $\nabla \times$ を作用させて (18) を用いることにより，電場，磁場の一方だけを含む式を得る．

$$(\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E}. \tag{20}$$

磁場も全く同じ式（**波動方程式**と呼ぶ）を満たす．その最も簡単な解は，平面波（進行方向が $\boldsymbol{k}$ の向き）

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{Re} \left(e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t + \theta)} \right), \tag{21}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{B}_0 \mathrm{Re} \left(e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t + \theta)} \right) \tag{22}$$

である．$\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0$ は実数の定数ベクトル，θ は不定の位相角度である．ただし，$|\boldsymbol{k}| = \frac{\omega}{c}$ が満たされていなければならない．実際，この形を代入すると，条件 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0, \quad \omega \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0$ が満たされていればよいことがわかる．電場と磁場は，$\boldsymbol{k}$ に直交しているだけでなく互いにも直交していることがわかる．波長 λ および振動数 ν で表せば $|\boldsymbol{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu$ であるから $\lambda\nu = c$．確かに c は伝播速度を与える．光が電磁気的な波であるという認識に至る立役者がマックスウェル（1831–1879）である．そのため，これらの方程式をその名を冠して呼ぶようになった．

4. 電磁場のポテンシャル

任意の電荷，電流の分布の下でマックスウェル方程式を解いたり，粒子の運動も同時に取り扱うには，ポテンシャルの概念が有効である．方程式の一部をあらかじめ解いてしまうのである．(7), (8), (11), (12) は $\rho, \boldsymbol{j}$ を含んでいないことに注目しよう．公式 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{C}) = 0$ を思い起こすと，(11) は磁場をある新しいベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を導入して

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{23}$$

と置けば自動的に成り立つ．ここでは証明を略するが，(11) に従う任意のベクトル場は必ずこの形に書ける．$\boldsymbol{A}$ をベクトルポテンシャルと呼ぶ．(12) は $\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0$ となる．そこで任意の関数 f で成り立つ公式 $\nabla \times \nabla f = 0$ に着目して，新しいスカラー場 ϕ（スカラーポテンシャルと呼ぶ）を導入し

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{24}$$

と置ける．あとはこれらを用いて残りの 2 つの式 (10), (13) を解くことを考えればよい．

このとき，ポテンシャルを選ぶ仕方には任意性があることを利用できる．1 個の任意関数 $\lambda(\boldsymbol{x}, t)$ によりポテンシャルについて

$$\phi \to \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\lambda \tag{25}$$

という置き換え（**ゲージ変換**と呼ぶ）を行っても電場・磁場どちらも変化しない．これを**ゲージ不変性**と呼ぶ．これも用いてスカラー 1 個の条件を課せる．便利な選び方の一つは，ローレンツ条件と呼ばれる

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{26}$$

である．この下で，マックスウェル方程式の残りの 2 つは次の式に帰着する．

$$\Box \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{27}$$

$$\Box \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}. \tag{28}$$

ここで記号 $\Box = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ を定義した．電荷や電流がないときゼロになる解は

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \int d^3y \, \frac{\rho\left(\boldsymbol{y}, t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \int d^3y \, \frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{y}, t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c}\right)}{4\pi |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \tag{30}$$

である．これは電場を計算してみればわかるように，静的電荷分布に対する (3) の自然な一般化になっている．時間変数が $t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c}$ の形で入っているのは，電荷や電流の分布の影響が速度 c で伝わることを表している．一般解は，この特別解に，電荷密度，電流密度がゼロのときの一般解を加えた形に書ける．後者は，例えば平面波解の重ね合わせとして表せる．

5. 電気力学の作用原理

実は，ポテンシャルの最大の役割はそれによって電気力学を作用原理に基づき定式化できることにある．そのためのラグランジアン $L = L_{\mathrm{em}} + L_{\mathrm{int}} + L_{\mathrm{particle}}$ を示す．電磁場だけを含む項，粒子との相互作用，粒子の運動項の 3 つからなる．

$$L_{\mathrm{em}} = \int d^3x \, \epsilon_0 \Big(-\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right) \cdot \boldsymbol{E} - c^2 (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} - \frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{E}|^2 - c^2|\boldsymbol{B}|^2\right) \Big), \tag{31}$$

$$L_{\mathrm{int}} = \int d^3x \, \left(-\phi\rho + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}\right), \tag{32}$$

$$L_{\mathrm{particle}} = -\sum_{i=1}^{n} m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left|\frac{d\boldsymbol{x}_i}{dt}\right|^2}. \tag{33}$$

ラグランジェの運動方程式をこれから導くときは，ポテンシャル $(\phi, \boldsymbol{A})$，場 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$，$n$ 個の粒子の座標 $\boldsymbol{x}_i$ をすべて独立だとして変分を取る．ただし，電荷密度，電流密度は (4), (5) である．これから，マックスウェル方程式 (10)〜(13)，ポテンシャルと電磁場の関係 (23), (24)，および各粒子に対するローレンツの力 $\boldsymbol{F}_i$（(1) で $q \to e_i, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}_i$）による粒子の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_i \boldsymbol{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}_i|^2}{c^2}}}\right) = \boldsymbol{F}_i \tag{34}$$

のすべてが導かれる．

この作用原理は量子論で電気力学（量子電気力学）を定式化するときの出発点になる．解析力学を知っている読者のため，L から読み取れる大事な点を 2 つだけ指摘しておこう．i) ベクトルポテンシャル $-\boldsymbol{A}$ を一般化座標と見なすと，対応する一般化運動量は電場 $\boldsymbol{E}$ である．ii) スカラーポテンシャルの時間微分が含まれてないから，ϕ は実は拘束条件を与える未定係数である．対応する拘束条件はガウスの法則 (10) そのものである．

6. マックスウェル方程式と特殊相対性原理

次に特殊相対性原理との関係について触れる．電磁波の速度 c は任意の慣性系における電磁場の性質から決まる定数である．ニュートン力学のガリレイの相対性原理によれば，物質中を伝わる普通の波の伝搬速度は慣性系によって異なる．マックスウェル方程式の元になる電磁場の法則は任意の慣性系で成り立つことから，ガリレイの相対性原理は近似にすぎず慣性系どうしでの時間，空間座標の変換の法則は次の式（**ローレンツ変換**）$\left(\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$ で置き換えられるとしなければならない．

$$x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_{\parallel}\right). \tag{35}$$

新しい慣性系は元の系に対して速度 $\boldsymbol{v}$ で並進運動しているとし，そこの変数はすべてダッシュをつけて表す．また，ベクトルについては，添字 $\parallel$ で並進方向に沿った 1 次元成分を $(v = \boldsymbol{v}_{\parallel})$，$\perp$ で並進方向に垂直方向の 2 次

元成分を表すとする．垂直方向の座標は変換されないから $\boldsymbol{x}'_\perp = \boldsymbol{x}_\perp$ である．電磁場の並進方向成分は，このとき不変 $E'_\parallel = E_\parallel$, $B'_\parallel = B_\parallel$ で，垂直成分の変換は

$$\boldsymbol{E}'_\perp = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_\perp, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{B}'_\perp = \gamma\left(\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}\right)_\perp \tag{37}$$

である．つまり，時間座標と空間座標だけでなく，電場と磁場も慣性系の変更によって連続的に混じり合う．静止した電荷からは電場だけが生じるが，別の慣性系ではこの電荷が一定速度で運動しているから，磁場も生成されるので当然のことである．

ローレンツ変換の下での不変性をあからさまに示す最も便利な仕方について，**微分形式**を知っている読者のために触れておく．ポテンシャルおよび電荷密度，電流密度から 2 つの 1 次微分形式 $A = \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{x} - \phi dt$, $J = \mu_0(\boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{x} - c^2 \rho dt)$ を定義する．A, J はローレンツ変換に対して不変である．ゲージ変換は $A \to A + d\lambda$ に対応する．d は外微分作用素（$d^2 = 0$）．電磁場は A に d を作用して得られる 2 次微分形式 $F = dA$ にまとめられる．電磁場の変換性は F がローレンツ変換のもとで不変であることに対応する．マックスウェル方程式は，たった 1 個の式で表現できる．

$$d \star F = \star J. \tag{38}$$

$\star$ は双対微分形式をつくる操作（ホッジ作用素），電荷の保存を表す式は，$d \star J = 0$ である．

7. 展望

電磁場の概念は，19 世紀前半にファラデイによって電磁誘導を説明するために提唱された．彼は，その当時から力の統一的理解を目指して重力と電磁気現象の関係さえ予想し，様々な実験を行った先駆者である．その後，エーテルというある未知の物質の力学に基づいて電磁場の性質を理解しようと試みられた．もともと，ニュートンの遠隔作用の考え方そのものも同時代人にすんなり受け入れられたわけではなく，電磁誘導のような万有引力とは異なった複雑な電磁気現象の力学的な理解を進めるためにエーテルが存在するという仮説を導入するのは自然なステップであった．電磁誘導が発見された年に生まれたマックスウェル自身も，その立場から研究を進めたのである．しかし，エーテルの理論は力学理論としては根拠のない仮定に満ちた複雑怪奇なものにならざるを得ず，当時の物理学はかなり混乱した状態に陥ってしまった．

アインシュタインは 1905 年の論文で，光速度 c が慣性系によらないという「光速不変性」を基本原理として提唱することにより，物理学をエーテルの呪縛から解放した．それにより，ニュートン以来の絶対的で静的な時間・空間の観念を改め，新しい「時空」概念を打ち立てた．そして，一般相対性理論（1915 年）ではリーマン幾何学に基づき重力を取り入れて特殊相対性理論を拡張し，時空幾何学と物理学を結びつけ，より力学的な時空概念を確立した．

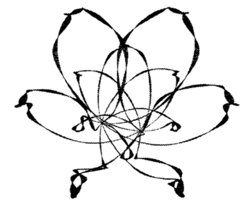
電磁場の幾何学化に関しては，一般相対性理論に触発されて数学者ワイルが 1918 年に，座標変換に加えてさらに時空計量の局所的スケール変換の下でも不変な理論に拡張する試みを発表した．ゲージ（＝尺度）変換という名称の由来はワイルの理論にある．しかし，これでは物質の電荷と結びつかず失敗に終わった．1921 年にはカルツァにより，時空を 5 次元に拡張し，ポテンシャル $(\boldsymbol{A}, \phi)$ を 5 次元目の座標の 4 次元への混ざり具合を表す係数の場として解釈する考えが提唱された．アインシュタインにとってはどちらも不満足なものであり，独自の仕方で幾何学化に向けて生涯の最後まで格闘したが成功できなかった．皮肉にも，特殊相対性理論の出発点になったマックスウェル理論が彼の後半生にとっては躓きの石になったのである．

現代の我々から見ると，アインシュタインはあまりに幾何学に固執しすぎたように思われる．ゲージ変換は量子力学とよく調和する．彼が亡くなる前の年（1954 年），ヤン–ミルズにより，ゲージ変換を非可換群に拡張したより一般的な理論が提唱され，それが重力以外の基本相互作用の理論として発展しいわゆる「標準理論」の基礎になった．しかし，アインシュタインは，幾何学とは相容れにくい量子論の枠組みを，「物理的実在」の記述として不完全であるとして決して受け入れなかった．だが，1970 年頃に誕生し現在も発展しつつある超弦理論では，一般相対性理論，ヤン–ミルズ理論および電磁場理論の拡張版を量子論の立場で自然に統合している．微分形式で言うと，1 次形式を一般化して A, J を一般の $(p+1)$ 次形式として得られる拡張された「電磁場」（RR 場と呼ばれる）が，重力場に加えて超弦理論に自然に包含されている．今世紀の理論物理学に課された最大の課題の一つは，時空幾何学と量子論を統合した新しい枠組みを構築することである．それは多分，超弦理論に基づき成し遂げられるに違いない．

（よねや・たみあき，東京大学大学院総合文化研究科）

シュレーディンガー方程式

つきない謎



藤川　和男

1. はじめに

量子力学のシュレーディンガー方程式に最初に講義で接したのは，学部2年生後期の森野米三先生の物理化学の講義であったように思う．まだ量子力学の基礎も学んでいないのに，電子系のシュレーディンガー方程式を書き，その解の振幅の二乗の概要を黒板に図示して電子状態の説明をされた．シュレーディンガー方程式の基礎にある量子力学の考え方も分からないときではあったが何となく量子力学の世界が少し感じ取れて，このような量子力学の学び方もあるのだなあと思った．その後，2年生の終わりの春休みに，物理学科へ進学の決まった級友2名と雪の残る谷川岳の麓にある東大の寮に数日こもって量子力学の勉強会をもった．シッフ（L. Schiff）の教科書を持ち込んで，初めから少しずつ読んでいった．英語の新しい単語に出くわしたりといった手探り状態であったが，シュレーディンガー方程式のやさしい例から少しずつ根気よく読んでいったのを覚えている．

3年生になり物理学科へ進んで，正式な量子力学の講義が始まったが，担当の梅沢博臣先生の講義は解析力学の復習と前期量子論の議論で1学期が終わったように記憶している．参考書は，小谷・梅沢監修の『大学演習量子力学』（裳華房）であった．したがって，3年生の1学期は，本格的にシュレーディンガー方程式に出会うことがなかった．2学期になると梅沢先生はイタリアへ出張され，新しく東大に赴任された有馬朗人先生が代わって量子力学の講義をされた．有馬先生は原子核理論とくに核運動量の合成に関するクレープシュ・ゴルダン係数とか第2量子化を駆使して精力的に研究されていた関係で，この方面に重点をおいた講義をされた．このような事情で，「普通」のシュレーディンガー方程式の扱いに関しては，あまり講義を聞いた印象がない．しかし，量子力学演習等で，その方面の勉強はカバーされたように記憶している．

シュレーディンガー方程式のクーロンポテンシャル中での散乱解に関しては，4年生の前期にゾンマーフェルトの教科書を自分で読んで勉強した．このゾンマーフェルトの教科書はよく書けた文字通りの名作で，特殊関数等の扱いは特に印象的であった．この影響で，4年の後期には3カ月ほどかけて，ディラック方程式におけるクーロン散乱の厳密な扱いに挑戦して，いろいろと式の変形を試みたが，これといった結果には至らなかった．

その後は，大学院生時代，それに続く研究生活では主として場の理論の研究を行った．量子力学の基礎的な側面に興味を持って研究を始めたのは，比較的に最近のことである．

2. シュレーディンガー方程式

さて，1個の粒子に関するシュレーディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right]\psi(t,\vec{x}) \quad (1)$$

の形をしており，この解の絶対値の二乗

$$|\psi(t,\vec{x})|^2 d^3x \Big/ \int |\psi(t,\vec{x})|^2 d^3x \quad (2)$$

が，粒子が点 $\vec{x}$ の近くに存在する確率を表す．このシュレーディンガー方程式の特徴として，$\psi(t,\vec{x})$ に関して 1 次の線形方程式であり，そのために**重ね合わせの原理**という基本的な性質を満たすことがあげられる．すなわち，$\psi_1(t,\vec{x})$ と $\psi_2(t,\vec{x})$ を上記の方程式の解とするとき，c_1 と c_2 を定数としてその線形結合

$$c_1\psi_1(t,\vec{x}) + c_2\psi_2(t,\vec{x}) \quad (3)$$

もシュレーディンガー方程式の解となる．このこととも関連しているが，z を任意の複素数の定数とするとき $\psi(t,\vec{x})$ と

$$z\psi(t,\vec{x}) \quad (4)$$

が物理的に同等になる．事実，両方ともシュレーディンガー方程式を満たし，また式 (2) で同じ答えを与えるからである．ディラックは有名な教科書で，この性質 (4) を量子力学の波動場と古典的な波動の基本的な差異としている[1)]．すなわち，古典場では (4) のように z 倍するとその振幅が大きくなり物理的に異なる意味を持つが，量子力学では相対的な確率を問題にしていて絶対値自身は意味を持たないからである．シュレーディンガー方程式の解では，便宜上 $\int |\psi(t,\vec{x})|^2 d^3x = 1$ のように規格化することが多い．この場合は (4) の自由度は α を実の定数として

$$e^{i\alpha}\psi(t,\vec{x}) \quad (5)$$

に制限される．この位相の自由度のために，量子力学の状態ベクトル $\psi(t,\vec{x})$ は**射線表現**（ray representation）で与えられるといわれる．

振幅 $\psi(t,\vec{x})$ は波動方程式 (1) を満たすが，粒子はあくまでも点状の粒子として存在し，波動的に広がっているわけではない．振幅 $\psi(t,\vec{x})$ は (2) に従い存在確率を表しているだけである．この理由により，振幅 $\psi(t,\vec{x})$ の直観的な理解は非常に難しい．振幅 $\psi(t,\vec{x})$ 自身は時間と空間点を決めればある決まった値を持っているが，手にとって見る（あるいは，測定器で直接測ってみる）というわけにはいかない．このために，量子力学の直観的な理解のためには，ファインマンの経路積分のように古典的な無限個の時空を走る道を考えて，作用で与えられる位相の重み付きで足し上げるという描像がよく用いられることになる．

確率振幅の直観的な理解が困難なことは，2 粒子を表すシュレーディンガー方程式

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}_1,\vec{x}_2) \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_2 + V(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\right]\psi(t,\vec{x}_1,\vec{x}_2) \end{aligned} \quad (6)$$

を考えればもっと明らかになる．この波動方程式は 6 次元の（位相）空間の波動場を表し，3 次元の空間の波ではない．すなわち振幅 $\psi(t,\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ に 4 次元の時空（時間 + 3 次元の空間）での意味を与えるのは易しくない．ただし，$V(\vec{x}_1-\vec{x}_2)=0$ で相互作用がない場合は，$\psi(t,\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \phi(t,\vec{x}_1)\varphi(t,\vec{x}_2)$ のように，自由な 1 粒子のシュレーディンガー方程式の解の積に選ぶことも可能である．（2 つの解の積で書けるのは 6 次元空間の波動であるからで，3 次元の波動なら，例えば，2 つの解の和で書けることになる．）このような積の状態から出発して，摂動的に相互作用 $V(\vec{x}_1-\vec{x}_2)$ の効果を時空中を運動する 2 個の粒子の散乱として取り入れてゆくのが，グリーン関数（現在の例では，時間発展演算子）を用いた記述（ファインマン図）であり，このときは 4 次元時空中を運動する 2 粒子という描像を描けるという利点がある．

3. エンタングルメント

確率振幅 $\psi(t,\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ が 6 次元の（位相）空間の波動であり，3 次元空間の波でないことと関連して，エンタングルメント（entanglement）という性質が現れる．数学的には

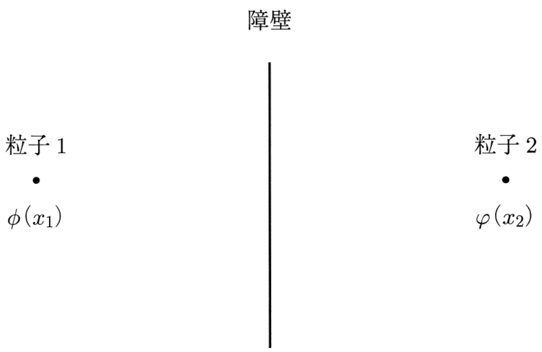


図 1　量子相関（エンタングルメント）：2 つの粒子の間の量子相関は，3 次元空間の距離が遠く離れても成立する．波動関数は実在空間に存在するわけではないので，この相関は途中に障壁を置いても遮断されることはない．

$$\psi(t,\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \phi(t,\vec{x}_1)\varphi(t,\vec{x}_2) \qquad (7)$$

の形に書ける波動関数は**分離可能**（separable）と呼ばれ，エンタングルしていないと定義される．このような形に書けない波動関数はすべてエンタングルしていると定義される．

自由な 2 粒子をとっても，

$$\psi(t,\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi(t,\vec{x}_1)\varphi(t,\vec{x}_2) + \varphi(t,\vec{x}_1)\phi(t,\vec{x}_2)] \qquad (8)$$

の形は，分離可能ではなくエンタングルしていることがわかる．ただし，$\int d^3x_1\, \phi^\star(t,\vec{x}_1)\varphi(t,\vec{x}_1) = 0$ とする．この場合は，$\psi(t,\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ の 6 次元空間の波動という性質が基本的になり，後で説明する波束の収縮と組み合わせると，例えば，粒子 1 を測定して $\phi(t,\vec{x}_1)$ 状態にあると分かると $\psi(t,\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ の第一項が実現され粒子 2 は状態 $\varphi(t,\vec{x}_2)$ にあり，粒子 1 を測定して $\varphi(t,\vec{x}_1)$ 状態にあると分かると $\psi(t,\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ の第二項が実現され粒子 2 は状態 $\phi(t,\vec{x}_2)$ にあることになる．ただし，粒子 1 を測定する以前には，第一項が実現されるか第二項が実現されるかは確率的にしか予言できない．この量子相関は 2 つの粒子が 3 次元空間の意味でどれだけ離れているかによらず成立する性質である．この遠距離相関という性質が量子情報の議論で基本的になる．

4. 波束の収縮

簡単のために 1 粒子の波動関数に戻って考える．波動関数は一般に

$$\psi(t,\vec{x}) = \sum_n a_n(t)\varphi_n(\vec{x}),$$
$$\int d^3x\ \varphi_n^\star(\vec{x})\varphi_m(\vec{x}) = \delta_{n,m} \qquad (9)$$

のように正規直交系の基底 $\{\varphi_n(\vec{x})\}$ を用いて展開される．この形に書いたときの波動関数の物理的な解釈は，系の状態が $\varphi_n(\vec{x})$ に見出される（相対）確率が $|a_n(t)|^2$ で与えられるとする．$\psi(t,\vec{x})$ を規格化しておけば，$\sum_n |a_n(t)|^2 = 1$ が成立しすべての確率を足すと 1 になる．正確には，繰り返し測定するとき，特定の状態 $\varphi_n(\vec{x})$ が測定される確率は $|a_n(t)|^2$ で与えられる．（サイコロの例で言えば，一回振れば必ずどれかの数字に当たるが，選択的に例えば 3 を出そうとすればそのような確率は 1/6 となる．）

したがって，状態 $\psi(t,\vec{x})$ が与えられたときには，すべての $\{\varphi_n(\vec{x})\}$ がそれぞれ確率 $|a_n(t)|^2$ で含まれていることになる．測定を行うまでは，どの状態が実際に実現されるかわからない．しかし，もし測定して，ある一つの $\varphi_n(\vec{x})$ が見出されたとすると（あるいは，状態 $\varphi_n(\vec{x})$ を選択的に選び出すような測定をすると），それ以降は状態は $|c_n(t)| = 1$ として

$$\psi(t,\vec{x}) = c_n(t)\varphi_n(\vec{x}) \qquad (10)$$

で与えられることになる．すなわち，無限個の可能な状態のうちの一つが測定により選ばれ，以降は系の状態はその特殊な状態に存在することになる．このように，測定により状態が特殊な測定された状態に遷移する現象は，波動関数の収縮（reduction）と呼ばれる．測定をするまでは，どの状態にあるか決めることが不可能であり，したがって原理的には全空間に広がっているような状態 $\psi(t,\vec{x})$ の場合でも，測定した途端に空間的に小さな領域に限定された特殊な状態 $\varphi_n(\vec{x})$ に瞬時に遷移することが許されるので波束の「収縮」と呼ばれるわ

けである．収縮するのは確率振幅を表す波束であり，粒子自体が遠く離れた点へ一瞬に移動するわけではない．これは，収縮というよりは，再出発（re-start）とでも呼ぶのがより適切かもしれない．この現象も，本質的に位相空間の波動を，4 次元時空の描像で考えるために生じる不思議な現象と考えることができる．

事実，測定をするという操作をもう少し詳しく考察すると，量子力学の変数の組 $(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}})$ を他の 2 つの演算子に

$$\hat{\vec{x}} \to \hat{\vec{\mu}}_x, \quad \hat{\vec{p}} \to \hat{\vec{\mu}}_p$$

のように**転写する**操作として定義される．ただし，測定という考えは測定器を表す演算子 $\hat{\vec{\mu}}_x$ と $\hat{\vec{\mu}}_p$ は交換する $[\hat{\vec{\mu}}_x, \hat{\vec{\mu}}_p] = 0$ という性質に反映される．（したがって，$\hat{\vec{\mu}}_x$ と $\hat{\vec{\mu}}_p$ は互いに正準共役ではなく，$\hat{\vec{\mu}}_x$ に対応する運動量および $\hat{\vec{\mu}}_p$ に対応する座標がそれぞれ別に存在すると考える．）本来ハイゼンベルグの交換関係 $[\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{k,l}$ を満たす演算子を，交換する演算子 $\hat{\vec{\mu}}_x$ と $\hat{\vec{\mu}}_p$ に正確に転写するのは不可能でありこの過程で後で議論するハイゼンベルグの不確定性関係が生じるわけである．このようにして測定で得られた結果を最大限正確に反映する状態として，改めて変数の組 $(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}})$ で記述される終状態が定義され，始状態からこの終状態への転移が波束の収束として記述される．これからわかるように，測定という操作には位相空間の考察が基本的となる．

5. 不確定性関係

量子力学が位相空間で定義されていることの一つの帰結として，不確定性関係がよく知られている．空間座標と運動量の平均値（期待値）を

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \int d^3x \ \psi^\star(t,\vec{x}) x \psi(t,\vec{x}), \\ \langle p_x \rangle &= \int d^3x \ \psi^\star(t,\vec{x}) \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(t,\vec{x})\end{aligned} \tag{11}$$

で定義し，標準偏差を

$$\begin{aligned}\Delta x &= \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}, \\ \Delta p_x &= \sqrt{\langle (\hat{p}_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle}\end{aligned} \tag{12}$$

で定義するとき，Kennard により導かれた不確定性関係は[2)]

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{13}$$

で与えられる．これは交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ から導かれ，常に成立する正確な関係式である．この関係式の解釈としては，座標を正確に決めようとすると運動量の揺らぎ（平均値からのずれ）が大きくなり，運動量を正確に決めようとすると座標の揺らぎが大きくなると理解される．他方，ハイゼンベルグが最初に提唱した不確定性関係は，測定の具体的な考察が入っており数学的な定式化はより複雑である．

例として，1 次元の長さ L の区間，$-L/2 \leq x \leq L/2$，に閉じ込められた 1 個の粒子の運動を周期的な境界条件を課して考える．運動量は $p_n = 2\pi n\hbar/L, \quad n = 0, \pm1, \pm2, ...$ で与えられ，規格化された波動関数としては

$$\begin{aligned}\psi_n(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \Bigg\{ &\exp\left[i\frac{p_n x}{\hbar} - i\frac{p_n^2}{2m\hbar}t \right] \\ &+ \exp\left[i\frac{p_{n+1}x}{\hbar} - i\frac{p_{n+1}^2}{2m\hbar}t \right] \Bigg\}\end{aligned} \tag{14}$$

を採用すると[*1)]，この波動関数に対しては

$$\Delta x = \frac{L}{2\sqrt{3}}, \quad \Delta p = \frac{\pi\hbar}{L} \tag{15}$$

となることが確かめられ (13) を満たす．

最近，筆者は不確定性関係に確率の概念を持ち込むことを提案した．すなわち，不確定性関係は「原理」ではなく量子力学の帰結の一つであり，小さな確率を許せば不確定性関係を大きく破ってもよいという考えである[3)]．この基本的な考え方は，$a \ll L$ として $l = 1, 2, \cdots, N = L/a$ に対して幅 a を持つ正規直交系を

---

*1）技術的な理由で $\psi_n(t,x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left\{ ip_n x/\hbar - i\frac{p_n^2}{2m\hbar}t \right\}$ は避けることにする．

$$u_l(x) = \frac{1}{\sqrt{a}},$$
$$-L/2 + a(l-1) \le x < -L/2 + al, \quad (16)$$

それ以外の場所では $u_l(x) = 0$ で定義する．このとき，(14) は

$$\psi(t,x) = \sqrt{a}\psi_n(t,x)\sum_{l=1}^{N} u_l(x)$$
$$= \sqrt{\frac{a}{L}}\sum_{l=1}^{N}\sqrt{L}\psi_n(t,x)u_l(x) \quad (17)$$

と書くことができる．(17) をさらに

$$\psi(t,x) = \sum_{l=1}^{N}\sqrt{\frac{a}{L}}\phi_l(t,x) \quad (18)$$

と書くと（すなわち $\phi_l(t,x) = \sqrt{L}\psi_n(t,x)u_l(x)$ と定義すると），直交系 $\{\phi_l(t,x)\}$ は完全には正規化されていないが $\int_{-L/2}^{L/2} dx|\phi_l(t,x)|^2 \sim 1$ であることが確かめられる．

さて，(18) の $\psi(t,x)$ では運動量を測定するとその揺らぎ（不確定度）は (15) からわかるように $\delta p \sim \pi\hbar/L$ であるが，このようにして用意された波動関数 $\psi(t,x)$ に対して特定の $\phi_l(t,x)$ を**選択的**に測ったと想定すると（例えば，大きさ a の粒子探知機を特定の場所に設置しておくと），その座標の不確定度は $\delta x \sim a$ である．したがって

$$\delta x\delta p \sim \pi\hbar\frac{a}{L} \ll \hbar \quad (19)$$

となり，不確定性関係を大きく破ることになる．しかし，このことが起こる確率は (18) に (9) の考察を適用すると $\sim |\sqrt{\frac{a}{L}}|^2 = \frac{a}{L} \ll 1$ である．すなわち，明白な不確定性関係の破れは可能であるが，その確率は非常に小さいことになる．実は，過去にいろいろな人により理論的に指摘されていた不確定性関係の明白な破れの可能な例は，すべて現在の例のようにその実現確率が非常に小さいことが示される[3]．この考察は，これまでに明白な不確定性関係の破れの実験的な報告がないこととも合致している．（他方，(18) の波動関数 $\psi(t,x)$ に対して，$\{\phi_l(t,x)\}$ のうちのどれでもよいという測定を繰り返し行うと確率は 1 で実現されるが，この場合は (15) で示される座標の揺らぎが現れる.）もちろん，特定の $\phi_l(t,x)$ を測った後に運動量を測定すると，波束の収縮の考察と組み合わせるとその揺らぎは**ほぼ 1 の確率**で $\delta p \sim \hbar/a$ であり，したがって $\delta p\delta x \sim \hbar$ となり Kennard の関係式 (13) と矛盾しない．しかし $\phi_l(t,x)$ をフーリエ分解するとわかるようにそのフーリエ振幅 $\tilde{\phi}_l(t,p) = \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, e^{ipx}\phi_l(t,x)$ には，非常に小さい確率（$\sim a/L$）でではあるが，(17) の $\psi(t,x)$ とほぼ同じ運動量が運動量の幅（広がり）$\delta p \sim \pi\hbar/L$ の範囲に含まれていることが確かめられる．すなわち，$|\tilde{\phi}_l(t,p=p_n)|^2\delta p = |\tilde{\phi}_l(t,p=p_n)|^2\pi\hbar/L \sim a/L$ が成立する．この意味で，特定の $\phi_l(t,x)$ を測定した後においても運動量を**選択的**に測定すれば (19) のように不確定性関係を明白に破ることができるが，その確率は非常に小さくなる[3]．

6. おわりに

現象と物理概念を結ぶ方程式という観点からは，シュレーディンガー方程式の成功はめざましくその正しさは疑いの余地がない．しかし，シュレーディンガーの波動関数の持つ意味とか量子力学の本当に深いところの理解ということになると，いつまでたっても良く理解できたという実感がわかないのも事実であり，つきない謎といえる．

参考文献

1) P.A.M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, (Oxford University Press, 1957).
2) E.H. Kennard, *Z. Phys.* **44** (1927) 326.
3) K. Fujikawa and K. Umetsu, *Progress of Theoretical Physics*, **120** (2008) 797.

（ふじかわ・かずお，日本大学理工学部）

ハイゼンベルグ方程式

ハイゼンベルグ演算子の重要な役割

佐々木　隆



フンボルト旅行中のエリザベート・ハイゼンベルグ（白髪で黒の半コート，撮影者：著者）

1. はじめに――基本方程式

物理科学には無数の方程式が存在する．それらが関与する現象も，極微の素粒子反応から，宇宙の進化にまで至る．これら自然の階層に応じて，方程式にも階層がある．最も基本的なものとしては，質点のニュートン方程式，古典電磁場のマックスウェル方程式，アインシュタイン方程式，シュレーディンガー方程式，ハイゼンベルグ方程式などが頭に浮かぶだろう．人によっては，ディラック方程式や，素粒子標準理論の方程式等を挙げることもあろう．古典力学は，量子力学の極限として得られる．また，個々の物質（場）を記述するものよりは，運動（時間変化）のあり方そのものを規定するシュレーディンガー方程式とハイゼンベルグ方程式のほうがより基本的であるといえる．上に挙げたディラック方程式等々は，それぞれの場のハイゼンベルグ方程式であるともいえる．そう考えると，物理科学で最も基本的な方程式は，ハイゼンベルグ方程式であるということになる．

2. 量子力学

必要な概念説明と記号の導入のために，量子力学を簡単におさらいしておこう．まず自由度 1 の系から．座標（演算子）を $\boldsymbol{x}$，それに共役な運動量（演算子）を $\boldsymbol{p}$ で表すと，それらが**量子化条件**

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}] \equiv \boldsymbol{x}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}=i\hbar\boldsymbol{1}, \quad \hbar \stackrel{\mathrm{def}}{=} h/2\pi \tag{1}$$

を満たすことが，量子論の出発点である．ハミルトニアンを簡単に

$$\mathcal{H}=\boldsymbol{p}^2/2m+V(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

にとる．ポテンシャル関数 V は時間に依存しない場合を扱う．系の**状態**をケット $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ あるいは，ブラ $\langle\psi|, \langle\varphi|$ 等で表す．物理（**観測**）量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \mathcal{H}$，あるいは一般の $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ 等は，これら状態の作るベクトル空間（ヒルベルト空間）に作用する線形演算子である．2 つの状態の間には，内積 $\langle\varphi|\psi\rangle$ が定義されており，正規化された状態に関しては，上の内積が $|\psi\rangle$ から $|\varphi\rangle$ への**遷移振幅**を与える．

シュレーディンガー表示

この表示では，演算子は時間に依存しないが，状態が時間に依存して変化する．これを $|\psi(t)\rangle$ と表そう．

状態の時間変化の方程式とその一般解は，下のように簡潔に書ける．

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle=\mathcal{H}|\psi(t)\rangle, \tag{3}$$

$$|\psi(t)\rangle=e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|\psi(0)\rangle. \tag{4}$$

座標表示で，状態 $|\psi(t)\rangle$ を表す**波動関数**を $\psi(x;t)=\langle x|\psi(t)\rangle$, $(\boldsymbol{x}|x\rangle=x|x\rangle)$ と書くと，これは，よく知られたシュレーディンガー方程式になる：

$$i\hbar\partial_t\psi(x;t)=\mathcal{H}\psi(x;t), \quad \boldsymbol{p}=-i\hbar\partial_x. \tag{5}$$

この場合には，$V(\boldsymbol{x})$ 中の座標演算子 $\boldsymbol{x}$ は，単なる x の掛け算を与え，運動量 $\boldsymbol{p}$ は，(1) を満たすように，微分演算子となる．ハミルトニアンのすべての固有値 $\{\mathcal{E}(n)\}$ とそれに属する固有関数 $\{\phi_n(x)\}$

$$\mathcal{H}|n\rangle=\mathcal{E}(n)|n\rangle, \quad n=0,1,\ldots, \tag{6}$$

$$\mathcal{H}\phi_n(x)=\mathcal{E}(n)\phi_n(x), \quad \phi_n(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle x|n\rangle, \tag{7}$$

$$\langle n|m\rangle=\int\phi_n^*(x)\phi_m(x)\,dx=\delta_{n\,m}, \tag{8}$$

が知られれば，（$t=0$ の）初期条件から，後の時間での状態が一意的に定まる：

$$\psi(x;t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{-i\mathcal{E}(n)t/\hbar}\phi_n(x). \tag{9}$$

時刻 t での観測量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ の**期待値**は

$$\begin{aligned}&\langle\psi(t)|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})|\psi(t)\rangle\\&=\int\psi^*(x;t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\psi(x;t)\,dx\end{aligned}\tag{10}$$

で与えられる．

ハイゼンベルグ表示

これに対して，ハイゼンベルグ表示では，状態は一定のままに留まる（$t=0$ で，この 2 つの表示が一致するとして $|\psi(0)\rangle$ と書くこともある）．古典物理のときと同様に，物理量が時間変化をする．それが，ハイゼンベルグ方程式である：

$$\hbar\partial_t\hat{\boldsymbol{A}}=i\,[\mathcal{H},\hat{\boldsymbol{A}}].\tag{11}$$

ここでは，ハイゼンベルグ表示の演算子であることをはっきり表すために，$\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{p}})$ と書く．ハミルトニアンは，時間変化をしないので，$\mathcal{H}$ をそのまま使う．必要なときには，時間依存性も $\hat{\boldsymbol{A}}(t)$ のように露わに書こう．（ハミルトニアンの固有状態とは限らない）ヒルベルト空間の任意の正規直交基底 $\{|n\rangle\}$ によって，物理量の行列要素

$$\hat{\boldsymbol{A}}_{nm}\stackrel{\text{def}}{=}\langle n|\hat{\boldsymbol{A}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{p}})|m\rangle,\tag{12}$$

を定義すると，ハイゼンベルグ方程式は行列の方程式として書ける：

$$\hbar\partial_t\hat{\boldsymbol{A}}_{nm}=i\sum_k\left(\mathcal{H}_{nk}\,\hat{\boldsymbol{A}}_{km}-\hat{\boldsymbol{A}}_{nk}\,\mathcal{H}_{km}\right).\tag{13}$$

これが，**行列力学**とも呼ばれた所以である．ハイゼンベルグ表示では，観測量 $\boldsymbol{A}$ の期待値は

$$\langle\psi(0)|\hat{\boldsymbol{A}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{p}};t)|\psi(0)\rangle\tag{14}$$

と表される．$t=0$ では両方の演算子が一致する $\hat{\boldsymbol{A}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{p}};0)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ としよう．

量子力学の教科書によれば，ハイゼンベルグ方程式の形式解

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{p}};t)=e^{i\mathcal{H}t/\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}\tag{15}$$

とシュレーディンガー方程式の形式解 (4) とを用いて，期待値の 2 つの表式 (10) と (14) が等しいことが示せて，2 つの表示が同値であると書いてある．

しかしながら，大部分の教科書では，有限自由度系の量子力学のほとんどすべての実例において，シュレーディンガー表示とシュレーディンガー方程式が用いられている．ハイゼンベルグ方程式が顔を出すのは，調和振動子の例と，無限大自由度系である場の量子論のみであると言っても過言でないであろう．後者の例では，無限個の位置座標に依存するシュレーディンガー方程式とその解の構造の煩雑さも，使われない理由の一つだが，ハイゼンベルグ演算子解の持つ概念的な簡潔さが重要になってくる．実際の計算には，相互作用表示が用いられ，自由場の解から作られる生成・消滅演算子が重要な役割を果たす．本当のところ，ハイゼンベルグ方程式は，実際の役には立たないという既成概念の壁は大きい．朝永振一郎著『量子力学 I』(p243) にも，「マトリックス力学によって問題を解くことは，はなはだ面倒である」と書いてある．

本稿の目的

ハイゼンベルグ方程式の解法に関して，最近著しい発展があった．自由度 1 の量子力学系に関する限り，**シュレーディンガー方程式が完全に解けるものの大部分は，ハイゼンベルグ方程式も完全に解けることがわかっている．**これらのハイゼンベルグ演算子解の大きな利点は，その正・負エネルギー部分から，**厳密な消滅・生成演算子**が定義できるところにある．改めて強調するまでもなく，消滅・生成演算子は現代量子物理学の礎石であり，新しい応用の道を開く可能性がある．更に，それらが「量子的に解ける系」の持つ**動力学的対称性代数**を表現する．この解法は，シュレーディンガー方程式が 2 階差分方程式になるいわゆる「離散的量子力学」系についても有効であり，全部で数十にのぼる具体例がある．そこでは，この動力学的対称性代数は，**アスキー・ウィルソン代数**という名でも呼ばれている．以下の節でこれらを簡単に解説しよう．

3. ハイゼンベルグ方程式の解法

解いて見せるにしても，まず「解け」なければならない．勝手に与えられた古典・量子力学系が解けるわけではない．

3.1「解ける」系

「解ける力学系とはどんなものか？」という問いに，ハミルトン形式の古典力学の中で答えを与えたのが，リューヴィルである．彼によると，自由度の数（N）と同じだけの独立な保存量で，互いのポアソン括弧が零のもの，$\{I_j,I_k\}=0$, $j,k=1,\ldots,N$, $I_1\equiv\mathcal{H}$, つまり対合的（involutive）なものが見つかれば，それらを用いて，系を作用・角変数に帰着させる正準変換の母関数が求積法だけから得られるという[1]．系が作用・角変数の形で表されれば，古典力学の問題として「解けた」と言ってよいのである．自由度 1 の系ではハ

ミルトニアンが保存量なので，常に「解ける」．実際，$t=0$ で，$x=x_0, p=p_0, \mathcal{H}(x_0,p_0)=\mathcal{E}_0$ とおくと，$\int_{x_0}^{x} dx'/\sqrt{2m(\mathcal{E}_0-V(x'))}=t$ によって求積法で解ける．

この判定法は，明らかに量子論では成り立たない．この節では，シュレーディンガー方程式が解ける場合に，対応するハイゼンベルグ方程式が解けることを示す．つまり，与えられたハミルトニアンのすべての固有値と，それに属する固有関数が知られている場合である．

3.2 調和振動子の例

まず最もよく知られた，調和振動子から始めよう．以降では，計算と記述の簡単化のために，質量（m），固有振動数（ω_0）やプランク定数（$\hbar$）等を 1 とした単位系を用いる．量子効果の大きさで，ものを見ていることになる．ハミルトニアンは，

$$\mathcal{H}=(\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{x}^2-1)/2 \tag{16}$$

で，ハイゼンベルグ方程式は

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\hat{\boldsymbol{p}},\ \dot{\hat{\boldsymbol{p}}}=-\hat{\boldsymbol{x}} \quad\Rightarrow\quad \ddot{\hat{\boldsymbol{x}}}=-\hat{\boldsymbol{x}}. \tag{17}$$

これは簡単に解けて，初期条件 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{p}}(0)=\boldsymbol{p}$ を代入すると

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{a}\,e^{-it}+\boldsymbol{a}^\dagger\,e^{it})/\sqrt{2}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{a}\overset{\text{def}}{=}(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{p})/\sqrt{2},\quad \boldsymbol{a}^\dagger\overset{\text{def}}{=}(\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{p})/\sqrt{2},$$

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^\dagger]=1,\quad \mathcal{H}=\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a} \tag{19}$$

となる．つまり，座標 $\hat{\boldsymbol{x}}$ のハイゼンベルグ演算子解の正・負エネルギー部分が，消滅・生成演算子になっている．よく知られているように，$\boldsymbol{a}|0\rangle=0$ の条件で基底状態を定めると，$|n\rangle=(\boldsymbol{a}^\dagger)^n|0\rangle/\sqrt{n!}$, $\mathcal{E}(n)=n$, $n=0,1,\ldots,$ となる．シュレーディンガー表示では，上の条件は $(x+\partial_x)\phi_0(x)=0$ となり，$\phi_0(x)\propto e^{-x^2/2}$ が得られる．生成演算子の関係式は，エルミート多項式 $H_n(x)$ のロドリーグ公式に同値で，波動関数

$$\phi_n(x)=N_n\,e^{-x^2/2}H_n(x),\quad N_n\text{: 定数} \tag{20}$$

を与える．

3.3 ハイゼンベルグの原論文の解き方

この方法は，しかしながら，ハイゼンベルグが量子力学の第 1 論文[2] “Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen”（運動学的および力学的関係の量子論的な再解釈）(7 月 29 日受付）で使ったものではない．この論文には，量子力学の基礎となる観測量の間の諸関係のほとんどが述べられているが，後の教科書に出てくるようなはっきりとした概念の形をとっていない．(1) の形の量子化条件も，(11) の形の運動方程式も現れないし，「行列」や「演算子」「固有値」等という言葉もない．これらは，約 2 カ月後に受理されたボルンとその助手のヨルダン[*1)]の論文[3] “Zur Quantenmechanik”（量子力学に向けて）(9 月 27 日受付）やその後の第 3 論文[4] “Zur Quantenmechanik II”（11 月 16 日受付）に出てくる．第 2 論文では，新しい力学をしっかりとした数学的基礎の上に築き上げようというボルンの意気込みが強く伝わってくる．

第 1 論文で，ハイゼンベルグが示したのは，**非調和振動子** $\ddot{\hat{\boldsymbol{x}}}+\hat{\boldsymbol{x}}+\lambda\hat{\boldsymbol{x}}^2=0$ の量子論的な解が，λ に関する摂動によって，正しく求められることであった．ここでも，他の教科書と同様に，簡単のために，$\lambda=0$ とする．まず，ハミルトニアンの固有状態（エネルギーの固有状態）で張られる基底 $\{|n\rangle\}$ をとり，方程式 $[\mathcal{H},[\mathcal{H},\hat{\boldsymbol{x}}]]-\hat{\boldsymbol{x}}=0$ の (n,m) 行列成分を $t=0$ で書き下すと，

$$\left((\mathcal{E}(n)-\mathcal{E}(m))^2-1\right)\langle n|\boldsymbol{x}|m\rangle=0 \tag{21}$$

となる．基底状態 $|0\rangle$ のエネルギーを 0, $\mathcal{E}(0)=0$ にとると，次は $\mathcal{E}(1)=1$ でのみ，$\langle 1|\boldsymbol{x}|0\rangle\neq 0$ となる．同様の議論によって，$\mathcal{E}(n)=n$, $\langle n|\boldsymbol{x}|n\pm 1\rangle\neq 0$ で，それ以外の行列要素が皆ゼロであることがわかる．行列要素の大きさは，非線形である量子化の条件 (1) の対角 (n,n) 成分から得られる．$\langle n|\boldsymbol{p}|m\rangle=i(\mathcal{E}(n)-\mathcal{E}(m))\langle n|\boldsymbol{x}|m\rangle$ を代入して

$$2\sum_{k=n\pm1}|\langle n|\boldsymbol{x}|k\rangle|^2\,(\mathcal{E}(k)-\mathcal{E}(n))=1$$

となる．ここで，行列要素の性質（エルミート性）$\langle n|\boldsymbol{x}|m\rangle=\langle m|\boldsymbol{x}|n\rangle^*$ を使った．上で得られた $\mathcal{E}(n)=n$ を代入して，順番に $|\langle n|\boldsymbol{x}|n-1\rangle|^2=n/2$ となる．これは，電気双極子輻射の遷移確率に対応する．3.2 節でも，同じ結果

$$\langle n|\boldsymbol{x}|n-1\rangle=\langle n|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^\dagger|n-1\rangle/\sqrt{2}=\sqrt{n/2}$$

が得られていた．

行列力学の中心人物のハイゼンベルグと，ボルンについて少し書こう．ハイゼンベルグは 1901 年 12 月 5 日に南ドイツ・ババリア州のヴュルツブルグで生まれた．これは，同地の大学で行われた X 線の研究で，

*1）ヨルダンはその直前にクーランの助手として，クーラン・ヒルベルトの本の執筆を手伝った．

レントゲンが第1回のノーベル物理学賞を受賞する日の5日前である．成長してから，ババリア州都のミュンヒェン大学で，生涯の友となる1歳年上のパウリとともにゾンマーフェルトの指導を受けた．1923年に流体力学の乱流についての学位論文を仕上げ，パウリの後を追って，ゲッティンゲン大学のボルンの助手となった．

ボルンは1882年に当時のドイツ・旧プロシャ領のブレスラウ（現在はポーランド，ヴロツラフ）で生まれた．1907年にゲッティンゲン大学で学位を取り，1921年から同大学の理論物理の教授となった．1925年の7月，ハイゼンベルグの第1論文を雑誌に送った後，ボルンはずっとその象徴的な掛け算規則に考えを巡らしていた．ある朝，それが20世紀の最初の年にブレスラウで聞いたRosanesの線形代数の講義に出てきた行列計算であることに気づいた．7月19日に，会議に出かける汽車の中でパウリに会って，新しい発見の興奮にひたって，彼に行列について語り，共同研究に誘った．パウリは「はい，あなたが煩瑣な定式化をお好きなのは知っております．その役立たずの数学でハイゼンベルグの物理をだめにしてしまいますよ…」と冷たかった．後年にパウリが，他の人にこの間の事情を説明したときには，パウリはそのときは未だハイゼンベルグのアイデアを深くは把握していなかったので，彼の計画をそっとしておいてあげようと考えたということだった．1932年のノーベル物理学賞が量子力学の創成などで，ハイゼンベルグひとりに与えられた際には，ボルンの落胆は大変なものだったという[5)]．

本稿の歴史的な部分を書くにあたって，ファン・デル・ヴェルデンの本[5)]が大変参考になった．前期量子論（1917）から，量子力学の建設の初期（1926）までの17編の代表的論文を英語で再録し，原著者たちの個人書簡やメモをふんだんに引用した丁寧な歴史的解説をつけたものである．波動力学は含めないという方針なので，シュレーディンガーの論文は入っていない．

解ける2つの例

シュレーディンガー方程式が完全に解ける2つの簡単な例について，ハイゼンベルグ演算子解も同様に求まることを示そう[6)]．(i) 調和振動子に $1/x^2$ のポテンシャルを加えたものと，(ii) 有限区間 $(0,\pi)$ での対称ポッシェル・テラーポテンシャル（$1/\sin^2 x$）である．

$$\textbf{(i)}: \mathcal{H}=(\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{x}^2+g(g-1)/\boldsymbol{x}^2)/2, \tag{22}$$

$$\mathcal{E}(n)=2n+g+1/2, \tag{23}$$

$$\phi_n(x)=N_n\, e^{-x^2/2}x^g L_n^{(\beta)}(x^2). \tag{24}$$

ここで，g は逆2乗ポテンシャルの結合定数で，$L_n^{(\beta)}$ はラゲール多項式，$\beta \stackrel{\rm def}{=} g-1/2$ である．前の3.2節の波動関数 (20) の多項式の引数は x だったが，今度は x^2 であるので，それについて，簡単な計算で，

$$\begin{aligned}&[\mathcal{H},\hat{\boldsymbol{x}}^2]=-i(\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{p}}+\hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{x}}),\\&[\mathcal{H},[\mathcal{H},\hat{\boldsymbol{x}}^2]\,]=4(\hat{\boldsymbol{x}}^2-\mathcal{H}),\end{aligned} \tag{25}$$

が示せる．これより $\hat{\boldsymbol{x}}^2$ が振動数 2 の調和振動をする．初等的にハイゼンベルグ演算子解

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}^2(t)=\boldsymbol{x}^2\,\cos 2t+(\boldsymbol{x}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})/2\,\sin 2t\\+(1-\cos 2t)\mathcal{H}\end{aligned} \tag{26}$$

と消滅・生成演算子 $\boldsymbol{a}\stackrel{\rm def}{=}\boldsymbol{a}^{(-)}$, $\boldsymbol{a}^\dagger\stackrel{\rm def}{=}\boldsymbol{a}^{(+)}$ およびそれらが満たす $\mathfrak{su}(1,1)$ 代数が得られる：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{(\pm)}&=(\boldsymbol{x}^2-\mathcal{H})/2\mp i(\boldsymbol{x}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})/4 \qquad (27)\\&=\Big(\big(\partial_x\mp\boldsymbol{x}\big)^2-g(g-1)/\boldsymbol{x}^2\Big)\Big/\,4,\end{aligned}$$

$$[\mathcal{H},\boldsymbol{a}^{(\pm)}]=\pm 2\boldsymbol{a}^{(\pm)},\quad [\boldsymbol{a}^{(-)},\boldsymbol{a}^{(+)}]=\mathcal{H}. \tag{28}$$

$$\textbf{(ii)}: \mathcal{H}=(\boldsymbol{p}^2+g(g-1)/\sin^2\boldsymbol{x})/2, \tag{29}$$

$$\mathcal{E}(n)=(n+g)^2/2, \tag{30}$$

$$\phi_n(x)=N_n\,(\sin x)^g P_n^{(\beta,\beta)}(\cos x). \tag{31}$$

ここで，g はサイン逆2乗ポテンシャルの結合定数で，$P_n^{(\beta,\beta)}$ はヤコビ多項式，$\beta\stackrel{\rm def}{=}g-1/2$ である．前と同様に多項式の引数を $\eta(\boldsymbol{x})\stackrel{\rm def}{=}\cos\boldsymbol{x}$ と書いて，その交換関係を計算すると

$$[\mathcal{H},[\mathcal{H},\eta(\boldsymbol{x})]\,]=\eta(\boldsymbol{x})(2\mathcal{H}-1/4)+[\mathcal{H},\eta(\boldsymbol{x})]$$

を得る．これより $\eta(\boldsymbol{x})$ が古典的には，振動数 $\sqrt{2\mathcal{H}-1/4}$ の正弦振動をすることがわかる．振動数が，エネルギーに依存するので，調和振動ではない．以後，このような座標 $\eta(\boldsymbol{x})$ を正弦座標（sinusoidal coordinate）と呼ぶ．上の式からすぐ判ることは，更に何回もハミルトニアンと交換関係をとっても，$[[\mathcal{H},\cdots,[\mathcal{H},\eta(\boldsymbol{x})]]\cdot\cdot]$ の式は，$\mathcal{H}$ の多項式を係数に持つ $\eta(\boldsymbol{x})$ と $[\mathcal{H},\eta(\boldsymbol{x})]$ の一次結合で書かれることである．いま $({\rm ad}\mathcal{H})$ で，$\mathcal{H}$ との交換子をとる演算子を表そう．つまり，任意の演算子 $\boldsymbol{X}$ に対して，$({\rm ad}\mathcal{H})\boldsymbol{X}\stackrel{\rm def}{=}[\mathcal{H},\boldsymbol{X}]$, $({\rm ad}\mathcal{H})^2\boldsymbol{X}\stackrel{\rm def}{=}[\mathcal{H},[\mathcal{H},\boldsymbol{X}]]$ 等である．正弦座標のハイゼンベルグ演算子解は

$$\hat{\eta}(\boldsymbol{x}) = e^{i\mathcal{H}t}\eta(\boldsymbol{x})e^{-i\mathcal{H}t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}(\mathrm{ad}\mathcal{H})^n\eta(\boldsymbol{x}) \quad (32)$$

と書ける．上に述べた正弦座標の性質によって，これが $\eta(\boldsymbol{x})$ と $[\mathcal{H},\eta(\boldsymbol{x})]$ の一次結合として，閉じた形に表され，解法が終結する．

4. ハイゼンベルグ演算子解の一般論

以上をまとめると，自由度 1 の量子力学系のハイゼンベルグ方程式が厳密に解ける十分条件が判った．与えられたハミルトニアン $\mathcal{H}$ に対して，次の閉性関係 (closure relation)

$$[\mathcal{H},[\mathcal{H},\eta(\boldsymbol{x})]] = \eta(\boldsymbol{x})\,R_0(\mathcal{H}) + [\mathcal{H},\eta(\boldsymbol{x})]\,R_1(\mathcal{H}) + R_{-1}(\mathcal{H}) \quad (33)$$

を満たす**正弦座標**$\eta(\boldsymbol{x})$ が存在すれば，そのハイゼンベルグ演算子解が求まる[6]．ここで，$R_i(\mathcal{H}),\ i=0,\pm1$ はハミルトニアン $\mathcal{H}$ の多項式で，$\mathcal{H}$ が (2) のように 2 階の微分演算子を含む場合や，2 階の差分演算子を含む場合には，R_0, R_{-1} は高々 2 次で，R_1 は高々 1 次式である．2 次方程式 $y^2 - yR_1(\mathcal{H}) - R_0(\mathcal{H}) = 0$ の 2 つの根を $\alpha_\pm(\mathcal{H})$ と書こう：

$$\alpha_\pm(\mathcal{H}) = \left(R_1(\mathcal{H}) \pm \sqrt{R_1(\mathcal{H})^2 + 4R_0(\mathcal{H})}\right)/2. \quad (34)$$

簡単な漸化式を足しあわせることによって，正弦座標 $\eta(\boldsymbol{x})$ のハイゼンベルグ演算子解が次のように得られる：

$$\begin{aligned}\hat{\eta}(\boldsymbol{x}) &= e^{i\mathcal{H}t}\eta(\boldsymbol{x})e^{-i\mathcal{H}t}\\ &= [\mathcal{H},\eta(\boldsymbol{x})]\left(e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t} - e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}\right)\beta(\mathcal{H})\\ &\quad + \left(\eta(\boldsymbol{x}) + \gamma(\mathcal{H})\right)\left(-\alpha_-(\mathcal{H})e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t}\right.\\ &\quad \left.+\alpha_+(\mathcal{H})e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}\right)\beta(\mathcal{H}) - \gamma(\mathcal{H}).\end{aligned} \quad (35)$$

ここで，$\beta(\mathcal{H}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\alpha_+(\mathcal{H}) - \alpha_-(\mathcal{H}))^{-1}$ および $\gamma(\mathcal{H}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} R_{-1}(\mathcal{H})/R_0(\mathcal{H})$ を導入した．上式の正・負エネルギー部分，つまり，$e^{i\alpha_\mp(\mathcal{H})t}$ の係数が，それぞれ消滅・生成演算子になる．系のエネルギー準位は，$\mathcal{E}(0)$ から出発して過剰決定な方程式

$$\mathcal{E}(n+1) - \mathcal{E}(n) = \alpha_+(\mathcal{E}(n)), \quad (36)$$

$$\mathcal{E}(n-1) - \mathcal{E}(n) = \alpha_-(\mathcal{E}(n)) \quad (37)$$

の解として決まる．これからわかるように，$\alpha_\pm(\mathcal{E}(n))$ は，状態 $|n+1\rangle$ から $|n\rangle$ および $|n\rangle$ から $|n-1\rangle$ への遷移に伴って放射される電磁波の振動数という観測量である．また，最初の 2 つの例のように，$m = n\pm1, n$ 以外で $\langle m|\eta(\boldsymbol{x})|n\rangle = 0$ が成り立つ．これは，固有関数を構成する $\eta(x)$ の**直交多項式**の **3 項関係式**の反映である．

例 (ii) では，$\alpha_\pm(\mathcal{H}) = 1/2 \pm \sqrt{2\mathcal{H}}$ なので，$\mathcal{E}(n) = (n+g)^2/2$ が，上の (36), (37) を満たすことが容易に確かめられる．同様に，例 (ii) のハイゼンベルグ演算子解は具体的に，

$$\hat{\eta}(\boldsymbol{x}) = (i\sin\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{p} + \cos\boldsymbol{x}/2)\frac{e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t} - e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}}{2\sqrt{2\mathcal{H}}} + \cos\boldsymbol{x}\,\frac{-\alpha_-(\mathcal{H})e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t} + \alpha_+(\mathcal{H})e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}}{2\sqrt{2\mathcal{H}}} \quad (38)$$

となる．

通常の量子力学の適用範囲より，ずっと微細なスケールまで下がったときに，“**基本的長さ**” が効いてきて，微分演算子が差分演算子に置き換わった**離散量子力学**が役割を果たす可能性がある．現在の解法は，一連の離散量子力学の多くの例にも適用でき，数十の具体例を持つ[7]．それらの生成・消滅演算子の作る動力学的対称性代数の中には，(19) を q-変形した q-**振動子代数**も含まれる[8]．離散量子力学の固有関数の主要部分を成すのが，アスキー・ウィルソン多項式に代表される (q)-超幾何直交多項式である[9]．上の閉性関係 (33) で，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ と正弦座標 $\eta(\boldsymbol{x})$ の役割を交換したもの（双対閉性関係，dual closure relation）

$$[\eta(\boldsymbol{x}),[\eta(\boldsymbol{x}),\mathcal{H}]] = \mathcal{H}\,\widetilde{R}_0(\eta(\boldsymbol{x})) + [\eta(\boldsymbol{x}),\mathcal{H}]\,\widetilde{R}_1(\eta(\boldsymbol{x})) + \widetilde{R}_{-1}(\eta(\boldsymbol{x})) \quad (39)$$

も同様に成り立つ．関係式 (33), (39) を単に展開して，$\mathcal{H} \to \mathcal{A}$, $\eta(\boldsymbol{x}) \to \mathcal{B}$ と置き換えて，係数を適当に名付けると：

$$\mathcal{A}^2\mathcal{B} - \delta\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{A}^2 - \gamma(\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A}) - \rho\mathcal{B} = \gamma'\mathcal{A}^2 + \omega\mathcal{A} + \kappa, \quad (40)$$

$$\mathcal{B}^2\mathcal{A} - \delta\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{B}^2 - \gamma'(\mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{A}\mathcal{B}) - \rho'\mathcal{A} = \gamma\mathcal{B}^2 + \omega\mathcal{B} + \kappa' \quad (41)$$

と書ける．この抽象的代数は，アスキー・ウィルソン代数[10,11]と呼ばれている．閉性関係 (33)+ 双対閉性関係 (39) と比べると，全く構造が入っていないことに注意しよう．以上は，すべて自由度 1 の例だが，一

連の多自由度の完全可解量子系で，自由度と同じ数だけのハイゼンベルグ演算子解が構成された例が多数ある[12]．

「量子的に解ける」ことの特徴付け

この節を簡単に要約すると，シュレーディンガー方程式はハミルトニアンしか含まないので，ハミルトニアンの具体的内容によってのみ，「解ける」か否かを論じられる*[2]．ハイゼンベルグ方程式の場合には，ハミルトニアンともう一つの演算子が入ってくるために，その演算子を上手に選ぶことによって，きわめて一般的に，代数的な「解ける」ための十分条件（「閉性関係」'closure relation'）(33) を書き下すことができるのである．

5. 終わりに

筆者が博士課程を終えて，最初のポスドク2年を勤めたのが，ミュンヒェンのマックス・プランク物理学・宇宙物理学研究所だった．現在は，宇宙物理部門が分離して物理学部門だけになり，ヴェルナー・ハイゼンベルグ研究所と呼ばれる．ハイゼンベルグは，私が研究所に到着する数カ月前（1976年2月）に他界し，いろいろなことを直接尋ねる機会を得られなかったのは残念だった．彼の講演は一度だけ，大学初年次（1967年）に東大安田講堂で聞いた．ドイツ語なまりの強い英語で，内容はほとんど覚えていないが，その貫禄と威厳に強い印象を受けた記憶がある．ドイツ滞在2年目に，フンボルト財団の催した2週間のドイツ旅行に，ハイゼンベルグ夫人のエリザベートがツアーリーダーとして参加した．私が研究所勤務であったことも幸いしてか，意気投合して毎晩のように腕を組んでワイン酒場に行き，いろいろと話を聞かせてもらった．その中の一つを紹介しよう．

私が，「ミュンヒェンの町を歩いていると，時々ドイツ人に道を尋ねられることがある．他所者で，知らない可能性のほうが高いのに，どうして聞くのだろう？」というと，「外国人は，知らない可能性は高いけれど，知らないときは「知らない」と言うから，安心して尋ねられるのだ．ドイツ人の場合は，知らないときに，「知らない」とは言わずに，でたらめの方向を教えることがある．その判定がつきにくいから，ドイツ人には聞きにくいのだ」ということだった．そしてこんなことを話してくれた．長旅から重い荷物を持って帰ってきたときに，中央駅からタクシーに乗ることがある．ハイゼンベルグ家は，中心から北東に6 kmほど離れた，研究所の南の閑静な住宅街にある．行く先を告げると，運転手に，「そんな通りは存在しない」と言われ，「私が現に住んでいるのだから」といってもなかなか埒があかないことが時々あるという．今回，量子力学黎明期のドイツ人の論文を読んで，その硬さに触れて，こんな昔の話を思い出したのかもしれない．話が物理に行ったとき，エリザベートが「研究所の（ハイゼンベルグの）同僚たち（H-P. デュール，H. ザラー等）が頑張って，夫の理論（非線形スピノル統一場理論）を発展させて，問題を解決してくれると信じている」と語ったことが印象に残っている．

ボルンは1933年にナチを逃れて，英国に行き，ケンブリッジを経て，1936年にエディンバラ大学の自然哲学の教授となった．1953年に引退後ゲッチンゲンに戻った．1954年にボルンが，量子力学の基本的研究でノーベル物理学賞を得ると，関係者たちは安堵し喜んだという．1970年ゲッチンゲンで亡くなった．ボルンの娘がケンブリッジ時代に知り合ったドイツ語学者のウェールズ人と結婚して生まれたのが，美人歌手のオリヴィア・ニュートン・ジョンである．

*2) ハミルトニアンとそれに随伴するハミルトニアンの形から判定する「形状不変性」があるが，ここでは紙面の都合で触れられない．

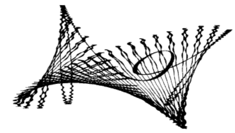
参考文献

1) 山内恭彦著，『一般力学』§49，岩波書店 (1959).
2) W. Heisenberg, *Z. Phys.* **33** (1925) 879–893.
3) M. Born & P. Jordan, *Z. Phys.* **34** (1925) 858–888.
4) M. Born, W. Heisenberg & P. Jordan, *Z. Phys.* **35** (1926) 557–615.
5) B. L. van der Waerden, “Sources of Quantum Mechanics”, Dover, New York (1967).
6) S. Odake and R. Sasaki, *J. Math. Phys.* **47** (2006) 102102.
7) —, *J. Math. Phys.* **49** (2008) 053503; *Prog. Theor. Phys.* **119** (2008) 663.
8) —, *Phys. Lett.* **B663** (2008) 141.
9) G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy, “*Special Functions*”, Cambridge, (1999).
10) A. S. Zhedanov, *Theor. Math. Phys.* **89** (1992) 1146.
11) P. Terwilliger and R. Vidunas, *J. Alg. Appl.* **3** (2004) 411.
12) S. Odake and R. Sasaki, *J. Math. Phys.* **48** (2007) 122104.

（ささき・りゅう，京都大学基礎物理学研究所）

ディラック方程式

相対論とスピン，フェルミ統計の密接な関係



松尾　泰

1. はじめに

ディラック（Dirac）方程式とは，ディラックが1928年電子を記述する相対論的方程式として提案したものである．他の物理に出てくる方程式と比較したときその大きな特徴として**スピン**と呼ばれる内部自由度が自動的に組み込まれている点があげられる．この方程式の発見とその後の発展の歴史的な経緯は大変興味深く，文献 1, 2) に詳しい記述がある．スピン自由度のおかげでディラック方程式は様々な興味深い構造を持つこととなる．

この解説ではスピンという自由度はどのようなものか，それがどのようにディラック方程式を導くのか，さらにはどのようにして量子化などの手続きを用いてディラック方程式がフェルミオンを記述すると考えられるのかなどの基本的な概念について重点を置く．本誌ではすでに林青司氏による解説があり[3] さらに高度な事柄についても当を得た説明がなされている．そちらも参照されたい．

2. 空間回転の自由度とスピン

まずスピンとは何かについて説明したい．特に，スピンがベクトル「平方根」と見なし得ることはディラック方程式を理解する上で大変重要である[1]．

まず，ベクトルとは何かということを簡単に復習しよう．空間の回転とは何かを思い出す．今，空間の直交座標として x, y, z 座標を取る．空間を回転するとこれらの軸が x', y', z' 軸に変更されるが，座標の間には行列表示を用いて次のような関係がある：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1}$$

ここで R は3行3列の回転を表す行列である．例えば z 軸周りの角度 θ の回転に対しては

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる．回転を表す行列は半径 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ を不変に保つ必要があるので，

$$R^t R = I_3 \tag{3}$$

を満たす．ここで R^t は R の転置行列，I_n は n 行 n 列の単位行列でここでは $n = 3$ の場合を考えている．この条件を満たす行列の集合は3次の直交群と呼ばれる．空間の回転は3個の角度の自由度（例えばオイラー角）で書き表される．

一般に空間回転に対して座標と同じように回転行列 R により変換されるものを**ベクトル**と呼ぶ．例えば，流体力学における流体の速度分布 $\vec{u}$ や電磁場における電場や磁場 $\vec{E}, \vec{B}$ は空間を回転したとき，座標軸と同じような回転を受けるのでベクトルである．

さてこのベクトルの「平方根」にあたる量が**スピノル**（**spinor**）である．ベクトルが実3成分で書き表される事に対してスピノルは複素2成分であり，$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$ などと書くことができる．非相対論的な量子論ではスピノルの成分 χ_1, χ_2 はそれぞれ z 方向の上向きスピン電子と下向きスピン電子の波動関数と解釈され，$|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1$ のように規格化される．

さて空間を回転するともちろんスピンの方向も回転する．それを $\chi' = g\chi$ のように線形変換で書き表す．ここで g は2行2列の複素行列である．このとき規

格化条件を保持するためには g はユニタリー行列となる必要があり，位相を保つため $\det g = 1$ を満たさなくてはいけない．これらの条件を満たす行列は特殊ユニタリー群 $SU(2)$ と呼ばれる連続群をなし，空間の回転と同じく3個の角度変数で書かれる：

$$g = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 e^{i\varphi_2} & \sin\varphi_1 e^{i\varphi_3} \\ -\sin\varphi_1 e^{-i\varphi_3} & \cos\varphi_1 e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

自由度の個数が同じなので空間の回転とスピノルの変換の間にある種の対応があることが予想される．実際スピノルの2次の組合せ：

$$v_i = \bar{\chi}\sigma_i\chi \quad (5)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

（σ_i $(i = 1, 2, 3)$ はパウリ行列と呼ばれる）を考えるとベクトルとして変換される：

$$v_i' := \bar{\chi}'\sigma_i\chi' = \bar{\chi}g^\dagger\sigma_i g\chi = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}v_j\,. \quad (7)$$

ここで R_{ij} は3次の直交群の元となる．例えば

$$g = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

ととり式 (7) に代入すると

$$\begin{aligned} g^\dagger\sigma_1 g &= \cos\theta\sigma_1 - \sin\theta\sigma_2, \\ g^\dagger\sigma_2 g &= \sin\theta\sigma_1 + \cos\theta\sigma_2, \\ g^\dagger\sigma_3 g &= \sigma_3 \end{aligned} \quad (9)$$

となることが簡単に示され，右辺の R_{ij} は式 (2) と一致することがわかる．ベクトル v_i がスピノル χ の2次式で書かれるためスピノルはベクトルの「平方根」と見なされるのである．

スピノルの変換には奇妙な点がある．今，z 軸周りの角度 2π の回転を考えよう．もちろん 2π 回転させるとベクトルは元に戻るので $R = I_3$ となる．一方スピノルの変換行列 (8) に $\theta = 2\pi$ を代入すると $g = -I_2$ となる！ つまりスピノルは空間を一回転したとき値が元に戻らない．これは直感的にはスピノルはベクトルの平方根なので，平方根の符号の任意性が現れていると考えられる．観測できる物理量にはこのような不定性が現れてはいけないので，スピノルから作られる物理量は必ず式 (7) のように2次式で書かれる必要がある．

パウリ行列は関係式：

$$\sigma_i^2 = I_2, \quad \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0\,, \ (i \neq j) \quad (10)$$

を満たす．この性質を使うとベクトルの内積の「平方根」をとることができる：

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 I_2 &= I_2 \sum_{i=1}^{3} v_i^2 = (\not{v})^2, \\ \not{v} &:= \sum_{i=1}^{3} v_i\sigma_i\,. \end{aligned} \quad (11)$$

この性質はディラック方程式を導く際，本質的に使われる．

3. ディラック方程式

特殊相対性とは前節で考えた空間回転に時間の変換の自由度を加えたものである．回転の場合は半径 $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ を不変になるようにしていたが，それを4次元時空の「距離」

$$s^2 = (ct)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x_\mu\eta^{\mu\nu}x_\nu \quad (12)$$

を不変にする変換に拡張する．ここで c は光速，$x_0 = ct$，であり計量を表す行列 η は

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

である．変換を $x'^\mu = M^\mu{}_\nu x^\nu$ と書くと (12) を不変にするためには行列 M は条件

$$M^t\eta M = \eta \quad (14)$$

を満たす必要がある．この条件を満たす変換を総称して**ローレンツ変換**と呼ぶ．

ローレンツ変換は空間回転（3自由度）と，高速で動く物体上の時計の遅れを記述する変換（ここでは x_1 方向の速度 v の等速運動を考える）

$$t' = \gamma(t - \beta x_1/c)\,, \quad x' = \gamma(x - vt) \quad (15)$$

$\left(\text{ただし}\beta = v/c, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ により生成される．等速運動は空間の3方向どれでもよいのでこの変換の自由度は3である．両方合わせるとローレンツ変換の自由度は6となる．

ローレンツ不変な運動方程式で最も簡単なものは**クライン・ゴルドン方程式**である*1)．

*1) 相対論的不変性を持つ理論を議論する際は光速 c とプランク定数 $\hbar$ を1とするような単位系（自然単位系）をとるのが通例である．しかしこの解説では相対論と量子力学が本質的であり，しかも非専門家を読者として想定しているのでこれらをあえて残している．

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu+(mc/\hbar)^2)\phi=0\,,\ \partial_\mu:=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,. \quad (16)$$

この方程式はスピン零粒子の方程式であることが知られている．ディラック方程式はここで現れる微分演算子の「平方根」を用いて書き表される．

このためパウリ行列の関係式 (10) と同様の関係式を満たすガンマ行列を導入する：

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta^{\mu\nu}I_4\,. \quad (17)$$

この関係式を満たす行列は 4 行 4 列の行列で書かれる．$\gamma'^\mu=U\gamma^\mu U^{-1}$ とユニタリ変換した行列も同じ関係式を満たすので表示はユニークではないがよく用いられる表示としては

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (i=1,2,3) \quad (18)$$

があげられる．ここでは 4 行 4 列の行列を 2 行 2 列の行列でブロック表記している．ガンマ行列を用いると微分演算子の平方根をとることができる：

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu=\partial\!\!\!/^2\,, \quad \partial\!\!\!/:=\gamma^\mu\partial_\mu\,. \quad (19)$$

これを用いてクライン・ゴルドン方程式に現れる微分演算子を「因数分解」する：

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu+(mc/\hbar)^2)I_4$$
$$=-(i\partial\!\!\!/+mc/\hbar I_4)(i\partial\!\!\!/-mc/\hbar I_4)\,. \quad (20)$$

ディラック方程式はこの因数の一つを用いて

$$(i\partial\!\!\!/-mc/\hbar I_4)\psi=0 \quad (21)$$

と書かれる．この場合ガンマ行列が 4 行 4 列の行列なので波動関数 ψ は 4 個の成分を持つ．

非相対論的量子力学ではスピンは付加的な自由度として手で加えるしかないが，ディラック方程式では，クライン・ゴルドン方程式を 1 階の方程式に書き換える際に必然的に現れる．これがディラック方程式の驚くべき点の一つである．

γ^i の表式の中にパウリ行列が現れることからも明らかなように空間の回転に対して波動関数 ψ は 1 価ではなく 2π 回転させると符号が反転する．したがって波動関数そのものが物理的な意味を持つわけではなくその 2 次の組合せをとる必要がある．ローレンツ変換に対してベクトルとして振る舞う量は (7) 式と同様に $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$（ただし $\bar{\psi}:=\psi^\dagger\gamma^0$）のように構成される．波動関数 ψ が 4 元ベクトルの平方根のように見ることができることも同様である．

4. 第 1 量子化とその問題点

クライン・ゴルドン方程式 (16) に対する平面波解を考えよう．今，

$$\phi(x)=e^{-ip^\mu x_\mu/\hbar} \quad (22)$$

を (16) に代入すると 4 元運動量 p^μ についての式

$$\eta^{\mu\nu}p_\mu p_\nu-(mc)^2$$
$$=(p^0)^2-(\vec{p})^2-(mc)^2=0 \quad (23)$$

が得られる．p^0 とエネルギーの関係 $p^0=E/c$ を思い出すとこれは質量 m の粒子に対する相対論的な質量殻条件：

$$E^2=m^2c^4+c^2(\vec{p})^2 \quad (24)$$

に他ならない．この表式の両辺の平方根をとり非相対論的な極限 $|\vec{p}|<<mc$ を考えると

$$E=mc^2+\frac{(\vec{p})^2}{2m}+\cdots \quad (25)$$

となる．第 1 項は有名なアインシュタインの公式，第 2 項は非相対論的エネルギー公式である．

非相対論的量子力学では x,p を正準量子化（$[x,p]=i\hbar$）し，シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi, \quad \hat{H}=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}(\hat{p}_i)^2,$$

$$\hat{p}_i=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} \quad (26)$$

が得られる．定常状態の場合には左辺は $E\psi$ と置き換えられる．$E=\frac{(\vec{p})^2}{2m}$ が成立するという意味でクライン・ゴルドン方程式 (16) はシュレディンガー方程式の自然な相対論的な拡張になっている．

しかし実際にはクライン・ゴルドン方程式を相対論的な量子論の方程式と解釈するのには基本的な問題がある．それは (24) の両辺の平方根をとるとエネルギーが負であることも可能であるという点である：

$$E=\pm mc^2\sqrt{1+(\vec{p})^2/(mc)^2}\,. \quad (27)$$

また詳しく述べないが確率振幅が正定値でないという問題もある．

シュレディンガー方程式と比較すると問題の由来は明白である．つまり相対論では時間と空間の取り扱いは平等であり空間微分が 2 階であれば必然的に時間微分も 2 階になってしまう．これは運動量表示では (24) 式のように運動量について 2 次の表式にはエネルギーも必ず 2 次で入ることを意味している．これからエネルギーの表式には必ず負の解が現れてしまう．

ディラックはこれらの点を嫌い 1 階の方程式 (21) を

導いた．これにより確率の正定値性の問題は解決した．しかしディラック方程式にはまだ問題が残っていた．

具体的に見るために平面波

$$\psi = e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar}u(p) \tag{28}$$

をディラック方程式に代入する．簡単のため $\vec{p}=\vec{0}$ としよう．ディラック方程式は行列の形に書きかえられ

$$\begin{pmatrix} (E-mc^2)I_2 & 0 \\ 0 & (E+mc^2)I_2 \end{pmatrix} u = 0 \tag{29}$$

となる．これから u が $(u_1, u_2, 0, 0)^t$ の形をとると正エネルギー mc^2 を持ち，$(0, 0, v_1, v_2)^t$ の形をとると負エネルギー $-mc^2$ を持つことがわかる．（ただし u_1, u_2, v_1, v_2 は任意の複素数.）結局 2 階の微分方程式を 1 階にしたことにより問題が完全に解決されたわけではなく，負エネルギー解の問題は残ってしまった．

個々の粒子の運動を量子論的に取り扱うのが第 1 量子化の手法であり，シュレディンガー方程式はその成功例である．しかし，相対論的な運動を考えると今見た負エネルギー解の問題だけでなく，高エネルギー粒子が別の粒子に崩壊するなどの現象が必然的に入り，個々の粒子の力学系だけに限定して解析することが意味をなさなくなる．従って粒子の生成消滅も含めた量子論，すなわち第 2 量子化が自然となる．これまで見てきた負エネルギー解の問題も第 2 量子化により解決される．

5. 第 2 量子化

第 2 量子化でどのように負のエネルギーの問題が回避されるかを見るためにまず簡単なクライン・ゴルドン方程式から考える．粒子の生成・消滅の描像をより明確にするためには系の大きさを有限にするとよい．ここでは簡単のため一辺 L の立方体に空間を選ぶ．このときクライン・ゴルドン方程式 (16) の平面波解（正エネルギー解）は次のようになる：

$$u_{\vec{n}}(x) = \frac{e^{-ip_{\mu\vec{n}}x^\mu/\hbar}}{\sqrt{2p^0_{\vec{n}}L^3}}, \quad p^i_{\vec{n}} = \frac{\hbar n^i}{L}, \tag{30}$$

ただし $p^0 = E/c$ は (27) の正符号のほうをとるものとする．正規化因子は後で出てくる生成消滅演算子の交換関係を簡単化するように選んである．負エネルギー解は上の解の複素共役である $(u_{\vec{n}}(x))^* \propto e^{-ip_{\mu\vec{n}}x^\mu}$ で与えられる．

クライン・ゴルドン方程式の一般解はこれらの解の線形結合で

$$\phi(x) = \sum_{\vec{n}} \left(a_{\vec{n}}u_{\vec{n}} + a^\dagger_{\vec{n}}u^*_{\vec{n}}\right) \tag{31}$$

のように書ける．第 1 量子化の段階では $a_{\vec{n}}, a^\dagger_{\vec{n}}$ は単なる係数であり通常の複素数である．

第 2 量子化とは場 $\phi(x)$ 自身を量子論的な演算子として定義するものであり，$\phi(x)$ を「座標変数」として取り扱う場合には「運動量変数」に対応するものは $\dot{\phi}$（ϕ の時間微分）となる．正準交換関係は

$$[\phi(\vec{x}), \dot{\phi}(\vec{y})] = i\hbar\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \tag{32}$$

となる．この関係式は $a_{\vec{n}}, a^\dagger_{\vec{n}}$ を演算子に昇格させ

$$[a_{\vec{n}}, a^\dagger_{\vec{m}}] = \delta_{\vec{n},\vec{m}} \tag{33}$$

という交換関係を要求することと同等である．これは量子力学に現れる調和振動子の交換関係である．ここでは $a_{\vec{n}}$ は運動量 $\vec{p}_{\vec{n}}$ を持つ粒子の消滅演算子，$a^\dagger_{\vec{m}}$ は生成演算子と解釈される．例えば，運動量 $\vec{p}_{\vec{n}_1}, \cdots, \vec{p}_{\vec{n}_p}$ を持つ粒子がそれぞれ 1 個，全部で粒子 p 個ある状態は

$$a^\dagger_{\vec{n}_1}\cdots a^\dagger_{\vec{n}_p}|0\rangle \tag{34}$$

と書かれる．ここで $|0\rangle$ は粒子が全くない状態を表し**フォック真空**と呼ばれる．真空は消滅演算子により消される：$a_{\vec{n}}|0\rangle = 0$.

(34) に対応する「第 1 量子化」の波動関数を取り出すためには次のような内積を考える：

$$\begin{aligned} &\Psi(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n) \\ &= \langle 0|\phi(\vec{x}_1)\cdots\phi(\vec{x}_p)a^\dagger_{\vec{n}_1}\cdots a^\dagger_{\vec{n}_p}|0\rangle \\ &= \sum_{\sigma\in S_p} u_{\vec{n}_1}(\vec{x}_{\sigma(1)})\cdots u_{\vec{n}_p}(\vec{x}_{\sigma(p)}). \end{aligned} \tag{35}$$

ここで S_p は p 次の置換群である．

展開 (31) において，正エネルギー解の係数が消滅演算子，負エネルギー解の係数が生成演算子であることが重要であり，上のようにして得られる波動関数には正エネルギー解のみが現れる．また同一のボソン粒子を考える際必要な**波動関数の対称化**が自動的に得られる点も第 2 量子化の方法の利点である．

ディラック方程式に対しても同様のことを行うことができる．$\vec{p}=0$ に対する式を一般化すると方程式

$$(p_\mu\gamma^\mu - mc)I_4\psi = 0 \tag{36}$$

の解は正エネルギー解が 2 個，負エネルギー解が 2 個ある．これらの解をそれぞれ適当な規格化因子とともに $u_\alpha(\vec{p}), v_\alpha(\vec{p})$ $(\alpha = 1, 2)$ と書くことにする．これらを用いてディラック方程式の波動関数を

$$\psi = \sum_{\vec{n}} \sum_{\alpha=1,2} \left(u_{\vec{n}\alpha} a_{\alpha\vec{n}} + v_{\vec{n}\alpha} b_{\alpha\vec{n}}\right), \quad \bar{\psi} = \sum_{\vec{n}} \sum_{\alpha=1,2} \left(\bar{u}_{\vec{n}\alpha} a^{\dagger}_{\alpha\vec{n}} + \bar{v}_{\vec{n}\alpha} b^{\dagger}_{\alpha\vec{n}}\right) \tag{37}$$

と展開する．ここで $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}$ である．

ディラック場に対しても正準量子化の方法は同じである．場 ψ を「座標変数」としたとき「運動量変数」は $i\psi^{\dagger}$ となる．仮にディラック場をスカラー場と同様にボソン場として量子化すると交換関係は

$$[\psi_A(\vec{x}), \psi^*_B(\vec{y})] = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{AB} \tag{38}$$

となる．$A, B = 1, \cdots, 4$ は 4 成分あるスピノル変数の成分を表す．これから係数 $a_{\alpha\vec{n}}$, $b_{\alpha\vec{n}}$ などの交換関係を読み取ると (33) とよく似た式

$$\left[a_{\alpha\vec{n}}, a^{\dagger}_{\beta\vec{m}}\right] = \delta_{\vec{n}\vec{m}}\delta_{\alpha\beta}, \quad \left[b_{\alpha\vec{n}}, b^{\dagger}_{\beta\vec{m}}\right] = \delta_{\vec{n}\vec{m}}\delta_{\alpha\beta} \tag{39}$$

が得られる．この交換関係式から $a_{\alpha\vec{n}}, b_{\alpha\vec{n}}$ は消滅演算子，$a^{\dagger}_{\alpha\vec{n}}, b^{\dagger}_{\alpha\vec{n}}$ は生成演算子と解釈できることはクライン・ゴルドン方程式の場合と全く同様である．

よく知られているようにディラック場はフェルミオン場を記述する方程式でありボソン場ではない．実際上で述べたボソン場としての記述は本質的な問題点を有している．それは消滅演算子である $b_{\alpha\vec{n}}$ の係数が負エネルギー解 $v_{\alpha\vec{n}}$ となってしまっている点である．これからフォック真空に生成演算子を作用させて得られる多粒子状態

$$(a^{\dagger}_{\alpha_1\vec{m}_1})^{M_1} \cdots (a^{\dagger}_{\alpha_p\vec{m}_p})^{M_q} \cdot \cdot (b^{\dagger}_{\alpha_1\vec{n}_1})^{N_1} \cdots (b^{\dagger}_{\alpha_p\vec{n}_p})^{N_p} |0\rangle \tag{40}$$

は $\sum_{i=1}^{p} N_i$ 個の負エネルギー粒子を含むことになる．結局，ディラック場をボソンとして量子化すると負のエネルギーの問題を避けられない．

一方場の量子論では正準変数に対して**反交換関係**を要求することができる．この場合は

$$\{\psi_A(\vec{x}), \psi^*_B(\vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{AB} \tag{41}$$

を要請することになる．またモード展開の係数に対しても

$$\left\{a_{\alpha\vec{n}}, a^{\dagger}_{\beta\vec{m}}\right\} = \delta_{\vec{n}\vec{m}}\delta_{\alpha\beta}, \quad \left\{b_{\alpha\vec{n}}, b^{\dagger}_{\beta\vec{m}}\right\} = \delta_{\vec{n}\vec{m}}\delta_{\alpha\beta}. \tag{42}$$

反交換関係を用いることにより改善される点は，(42) においては $b_{\alpha\vec{n}}$ と $b^{\dagger}_{\beta\vec{m}}$ を入れ替えても式が不変になる点である．そのため実際 $b_{\alpha\vec{n}} \leftrightarrow b^{\dagger}_{\beta\vec{m}}$ の入れ替えを行い新たに定義した $b^{\dagger}_{\alpha\vec{n}}$ を生成演算子として解釈する．新たな展開式では生成演算子の係数はすべて負エネルギー解となり，消滅演算子の係数は正エネルギー解となる．第 1 量子化の波動関数が正エネルギー解のみが現れ自動的に反対称化されることはボソンの場合と同じである．結局，ディラック方程式を矛盾なく量子化するためには場をフェルミオンとして取り扱う必要があることがわかった．

正エネルギー解である $u_{\alpha\vec{n}}$ と $v^*_{\alpha\vec{n}}$ はそれぞれ電子とその**反粒子**である陽電子を記述していると後に解釈された．ディラックのインスピレーションは負エネルギーの問題を解決し，フェルミ統計とスピンの自然な導入を与え，さらに陽電子という新粒子を予言するに至った．アインシュタインの一般相対論と比肩し得る偉大なアイディアと言わざるを得ない．

6. その後の発展

ディラック方程式はその後 80 年に及ぶ長い年月の実験的検証に耐え，フェルミオンを記述する正しい方程式として確立した．

ベクトルの平方根としてのスピノルは様々に形を変えて現在の物理学にも新しい発見をもたらしている．その最も代表的な例としては現在の統一理論で欠かすことができない構成要素である**超対称性**があげられる．超対称性とはボソンとフェルミオンの間の対称性であり，量子論を考えたときの輻射補正に相殺を起こし，量子補正の紫外発散から生じる粒子の質量に関する不自然さを消すことができる．超対称性変換はスピノルの自由度で記述され，その 2 乗は並進というベクトル的な対称性を表す．この関係式はこれまで述べてきたベクトルの平方根としてのスピノルと全く同じ考え方である．現在すべての力と物質の統一理論と考えられている超弦理論も超対称性を基礎に置く．この意味でもディラック方程式の発見が現代物理学にもたらした影響は甚大であった．

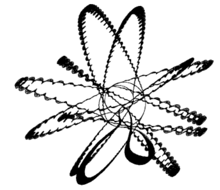
参考文献

1) 朝永振一郎著『新版　スピンはめぐる　成熟期の量子力学』(みすず書房).
2) S. ワインバーグ著，青山・有末訳『場の量子論』第 1 巻（吉岡書店）.
3) 林青司著「ディラック方程式」数理科学 2005 年 6 月号.

（まつお・ゆたか，東京大学大学院理学系研究科）

ナヴィエ・ストークス方程式と流体の運動

その魅力と視点



木村 芳文

1. はじめに

「万物は流転する（Panta rhei）」古代ギリシャの哲学者ヘラクレイトスによると言われるこの言葉が語るように，太古の昔より人々は物の変化や運動に心を奪われてきた．

図1は円柱を一定速度で運動する流体中に置き，後方にできるいわゆる「カルマン渦」を可視化したものである．このカルマン渦のように流体中には様々な美しいパターンがしばしば観察される．流れのパターン解析を始め，流体にまつわる多様な運動や現象を研究する学問は流体力学と呼ばれる．表題のナヴィエ・ストークス方程式は流体力学で中心的役割を果たす方程式であるが，それではナヴィエ・ストークス方程式はこのカルマン渦のような現象をどのように記述するのであろうか？ これは筆者が流体力学に興味を持った最初の疑問であった．この小文ではナヴィエ・ストークス方程式の導出から始めて方程式の特徴や魅力をお伝えすることを目標としている．

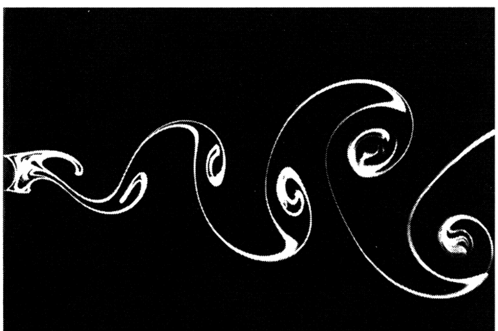


図1 カルマン渦の可視化（種子田定俊氏撮影）．

2. ナヴィエ・ストークス方程式の導出

ナヴィエ・ストークス方程式はニュートン力学の第二法則（運動方程式）$m\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}$ を流体について書き下したものであるが，その導出にあたっては，流体が質点や剛体のような孤立した物体ではなく，ある空間を占める**連続体**であり，また時刻とともに**流れる**という特殊性を考慮しなくてはならない．そこには大きく2つのポイントがあると言える．最初のポイントは

ポイント1

物理量を「場」の量として捉え，流体の運動に沿っての物理量の変化を考える．

である．今，注目する物理量（例えば流体の密度や温度）を F とし，それが時刻 t と空間 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ の関数であるとして，$F = F(t, x, y, z)$ と書けるものとする．このように t と x, y, z の関数としてある量が決まるとき，そのような性質をもつ時空間を「場」と呼び，定まる量を「場の量」と言う．特に場の量として一つのスカラーが決まるときスカラー場，ベクトルが決まるときベクトル場と呼んだりする．ここで微小に時刻と位置が変化したときの F の変化（変分）を考えると

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z$$

であり，時間についての全微分は

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

となる．いま流体の運動を追跡するためのマーカーとして，質量が無視できるような微小な体積を持つ仮想的な粒子を流体中に考えよう（これを流体粒子と呼ぶ）．その軌跡を $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とすると，速度は $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t, \mathrm{d}z/\mathrm{d}t) = (u, v, w)$ で与えられる．この粒子の運動に沿っての F の変化率は (u, v, w) を上式に代入して

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)F \qquad (1)\end{aligned}$$

と得られる．上の式はある時刻 t および位置 (x, y, z)（観測を行なう時点）における F の時間変化率が，F そのものの時間変化によるもの $(\partial F/\partial t)$ と，流体が流れているためにその付近から流れ入る（流れ出る）効果 $((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)F)$ の和になることを表している．

この考え方を速度の i 成分の時間変化率に適用すると，

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_i \qquad (2)$$

が得られるが，これが加速度の i 成分を与える表式である．上式で $\partial/\partial t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)$ は流体の運動に沿っての時間微分を与える演算子であり，D/Dt と表されることが多い．ここでもこの表記を採用しよう．

ナヴィエ・ストークス方程式導出おける2番目のポイントは流体粒子にかかる力のかかり方についてである．

ポイント2

流体粒子にかかる力は (1) 粒子の表面に接触することによってかかる力で，表面積に比例する「応力」と (2) 重力や電磁気力のように粒子の体積に比例する遠隔力，の2種類である．

「応力（stress）」という言葉はなじみが薄いかもしれないが，連続体力学（流体力学や固体力学）ではしばしば登場する概念である．応力は次の**応力テンソル**によって量的に定義される．

定義（応力テンソル） x_i **軸に垂直な面が受ける単位面積あたりの力の** x_j **軸の方向成分を応力テンソル** P_{ij} **で表す．**

応力テンソルは考える流体が粘性を持つか否かでその性質と表現が異なる．2つの場合を比較してみよう．

非粘性流体の場合： $P_{ij} = -p\delta_{ij}.$ (3)

力は面に垂直な方向の圧力のみがかかる．（負の符号は境界面の外向き法線の方向を正と定義することによる．）

粘性流体の場合： $P_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}.$ (4)

力は面に垂直な方向の圧力と粘性の効果を表す粘性応力テンソル τ_{ij} の和である．速度変化があまり大きくない場合には粘性応力は速度勾配に線形に依存することが期待される．このような近似が成り立つ流体はニュートン流体と呼ばれる*1)．ここで流体が等方的であると仮定すると，等方性テンソルについての議論により τ_{ij} は2種類の定数 μ と λ を使って以下のように表せる．（詳しい議論は参考文献1, 2) を参照して頂きたい．）

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \lambda\Theta\delta_{ij}. \qquad (5)$$

ここで $\Theta = \nabla\cdot\boldsymbol{u} = \partial u_i/\partial x_i$（ここで同じ添字については和をとるというアインシュタインの縮約の規則を採用している）であり，流体が縮まない場合（非圧縮性の場合）には0となる．また μ, λ はそれぞれ粘性率，第二粘性率と呼ばれる物理定数である．

面を通して流体粒子全体 D にかかる力 $\boldsymbol{F}$ を求めるには応力を流体粒子の全表面上 ∂D で面積分すればよい．また流体粒子には体積に比例するよう

*1) 生物流体，高分子溶液，液晶などの特殊な流体以外ではこのニュートン流体の近似がよく当てはまることが知られている．

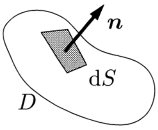


図 2　流体粒子 D と面素 $\mathrm{d}S$ および法線ベクトル $\boldsymbol{n}$.

な外力（遠隔力）もかかり得るので，その単位質量あたりの力を $\boldsymbol{K}$ とおくと力 $\boldsymbol{F}$ の成分は次のように与えられる（図 2）.

$$F_i = \int_{\partial D} P_{ij} n_j \mathrm{d}S + \int_D \rho K_i \mathrm{d}V$$
$$= \int_D \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \mathrm{d}V + \int_D \rho K_i \mathrm{d}V. \tag{6}$$

ここで第 2 式の面積分をガウスの積分定理を使って体積分に変換した．さて，以上をまとめて，密度 ρ の微小体積 $\mathrm{d}V$ の流体粒子 D についてニュートンの運動方程式を成分で書くと（$\mathrm{d}V$ を略して）

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i \tag{7}$$

が得られる．

上式の P_{ij} に (3) および (4), (5) の表式を代入すると，それぞれの場合について次の式を得る．

非粘性流体の場合：

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho K_i. \tag{8}$$

この方程式は流体のオイラー方程式と呼ばれる．

粘性流体の場合：

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \rho K_i. \tag{9}$$

ここで $\Delta = \sum_i \partial^2/\partial x_i^2$ はラプラス演算子と呼ばれる．この方程式がナヴィエ・ストークス方程式である．とくに流体が非圧縮 $(\Theta = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0)$ の場合には上の方程式は簡単になって

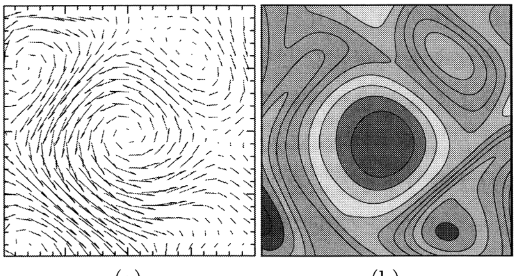
$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \rho K_i \tag{10}$$

となる．これから先は流体は非圧縮であると仮定して，この方程式について話を進めたいと思う．

3. ナヴィエ・ストークス方程式と流れ場

前節で導いた非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式 (10) は 3 次元空間においては 3 つの速度成分 $(u_1(t,\boldsymbol{x}), u_2(t,\boldsymbol{x}), u_3(t,\boldsymbol{x}))$ と圧力 p の 4 つの未知数を持つ．これらを与えられた初期条件と境界条件の下で 3 つの各成分についての方程式と非圧縮性の条件式 $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ を使って決定することが数学的な問題の定式化である．(10) の両辺の発散をとり，$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ を考慮すると，圧力 p は $\Delta p = \nabla \cdot [-\rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{K}]$ というポアソン方程式を満たすので，これを解いて (10) に代入し速度成分を考える領域の各点で求め，速度場を決定する．これは例えるならば，いろいろな観測点で風向と風速を測定し，それから天気図を描くことに対応していると言える．これを具体的な例について見てみよう．

図 3 (a) は 2 次元のナヴィエ・ストークス方程式を数値的に解き，ある時刻における速度ベクトルを矢印を使って図示したものである．（矢印の長さは速度ベクトルの大きさに比例している．）一方，(b) は左の速度ベクトル (u, v) に対して渦度 $\omega = \partial_x v - \partial_y u$ を計算し，その等高線を描いたものである．左右の図を見比べることによってどこに渦があるのか，また，速度の大きさが大きくなるのはどのような点なのかが伺えると思う．ナヴィエ・ストークス方程式の解は時々刻々に変化する速度ベクトル場，すなわち図 3 (a) のような矢印の集合，を与える．それらをつないだり，あるいは渦



(a)　(b)

図 3　(a) 2 次元ナヴィエ・ストークス方程式を数値的に解いて得られた速度ベクトルと (b) それから得られた渦度の等高線.

度（3 次元速度場 $\boldsymbol{u}$ に対する渦度場は $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ で定義される.）を計算したりすることにより，渦や波といった流体中の構造が見えてくるのである．図 1 のカルマン渦に対応するナヴィエ・ストークス方程式の解はどのようなものなのであろうか，想像してみると面白いと思う．

4. ナヴィエ・ストークス方程式の構造

ナヴィエ・ストークス方程式は非線形の偏微分方程式であり，そのままでは複雑な印象を与えるが，式変形をすることによって方程式の隠れた構造が見えてくる．

まず最初にベクトル解析の公式より，ナヴィエ・ストークス方程式の非線形項は次のように書き換えることができる．

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_i = -(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega})_i + \partial_i\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\right). \quad (11)$$

この式で (10) の非線形項を書き直し，両辺を密度 ρ で割って式をベクトルの形でまとめると

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\right) + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K} \quad (12)$$

が得られる．ここで $\nu = \mu/\rho$ は運動粘性率と呼ばれる物質定数である．(12) は非圧縮条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$ の下で考えているのであったが，この条件は質量の保存則を考えると $D\rho/Dt = 0$，すなわち流体粒子の運動に沿って密度が一定であることを意味している．ここではもう一歩進んで，密度が空間内で一様かつ時間的に一定である状況を考えよう．これは流速が音速に比べて十分遅く，また流体が濃度変化や温度変化などを含まないような場合には十分よく成り立つ近似であると言える．その場合には ρ は ∇ の内側に入れることができる．また，外力は重力などの保存力でポテンシャル Ω により $\boldsymbol{K} = -\nabla\Omega$ と勾配で表される部分とそれ以外の部分 $\boldsymbol{K}'$ に分けられるとする．以上をまとめると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}) = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + \Omega\right) + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}' \quad (13)$$

が得られる．

この表式が示すことはナヴィエ・ストークス方程式の非線形項は $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}$，すなわち速度ベクトルと渦度ベクトルのベクトル積で表されることである．つまり流体の非線形項の働きを理解する上では**速度と渦度の幾何学的な配置**が非常に重要な役割を果たすということである．特に特別な場合として速度ベクトルと渦度ベクトルが平行な場合，あるいは別の言葉で言うと $\nabla\times\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u}$，すなわち速度 $\boldsymbol{u}$ が回転演算子（$\nabla\times$）の固有ベクトルになっている場合，には $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega} = 0$ であり，方程式が線形になる．このような特徴を持った流れはベルトラミ流と呼ばれ流体力学における幾何学的性質を研究する上で重要な対象となっている[4,5]．

一方，(13) の右辺のナブラのかかった部分をまとめて $H = p/\rho + |\boldsymbol{u}|^2/2 + \Omega$ とおこう．これはベルヌーイ関数と呼ばれるものである*2)．ここで流れが定常（時間微分が 0）で非粘性（$\nu = 0$），かつ非保存力部分 $\boldsymbol{K}'$ が 0 の場合を考えると，

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega} = \nabla H \quad (14)$$

を得る．この式は $H =$ 一定の曲面が $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{\omega}$ に平行であることを示しており，これより H は流線および渦線に沿って一定値をとるというベルヌーイの定理が得られる．

渦度の定義 $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{u}$ を思い出して，(13) の両辺の回転をとると，勾配の回転は 0 であることからベルヌーイ関数部分が消え

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}) = \nu\Delta\boldsymbol{\omega} + \nabla\times\boldsymbol{K}' \quad (15)$$

が得られる．ここで $\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}) = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ が成り立つが，この右辺の第 1 項は速度場で渦が流される効果を表しており**移流項**，第 2 項は速度場によって渦が引き延ばされる効果を表し，**渦伸張項**と呼ばれる．さらに公式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \Delta u$ に非圧縮条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$ と渦

*2) 普通，ベルヌーイ関数，あるいはベルヌーイの定理は非粘性流体（完全流体）が断熱的であるときに定義されるが，ここでは密度の一様性という強い仮定をおいているために粘性流体でも勾配関数としてのベルヌーイ関数が定義できたのである．

度の定義式を使うと $\Delta u = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}$ が得られ[6]，以上の式を代入の後，移流項を移行し時間微分とまとめると渦度の流体に沿っての発展方程式として次の方程式を得る．

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \nu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\omega} + \nabla\times\boldsymbol{K}'. \tag{16}$$

5. 非線形項の本質——渦伸張——

渦度の発展方程式 (16) は流体方程式の持ち得る特異性について重要な示唆を与えてくれる．今，非保存力 $\boldsymbol{K}'$ がない場合を考えると渦度ベクトルの大きさについて

$$\frac{D|\boldsymbol{\omega}|^2}{Dt} = 2\,\omega_i\omega_j S_{ij} + 2\nu\omega_i\nabla^2\omega_i \tag{17}$$

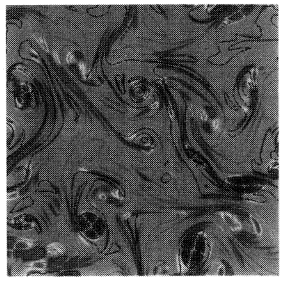
という方程式が成り立つことがわかる[3]．ここで

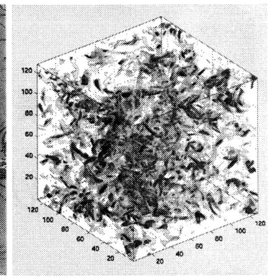
$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

は変形速度テンソルと呼ばれる速度勾配を表す量である．粘性の影響を無視すると，もし渦度ベクトルが変形速度テンソルの（正の固有値に属する）固有ベクトルの方向を向いていれば渦度の大きさは増大する．そして，もし，そのメカニズムを維持するような渦度ベクトルと変形速度テンソルの固有ベクトルの配置が存在すれば渦度は発散することが期待される．一方，2 次元の流れ場 $\boldsymbol{u} = (u, v, 0)$ においては $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{u} = (0, 0, \partial_x v - \partial_y u) \perp \boldsymbol{u}$ であるから渦伸張項は 0 となる．しかしながら 2 次元流体では次の関係式が成り立つことが確かめられる[7]．

$$\frac{D|\nabla\omega|^2}{Dt} = -2\,\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}S_{ij} + 2\nu\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial(\nabla^2\omega)}{\partial x_i}. \tag{18}$$

(17) と (18) の渦伸張項を比べると，2 次元ではスカラーの渦度の勾配が 3 次元における渦度ベクトルに対応していることがわかる．図 4 は 2 次元の渦度の等高線 (a) と 3 次元における渦度ベクトルの大きさの等値面 (b) を図示したものである．いずれの図でも渦の引き延ばしが観察されるが，これが流体方程式の非線形性の物理的解釈であると言える．（しかしながら 2 次元では特異性は生じないことが数学的に証明されている．）流体方程式の特異性は単に数学的な興味にとどまらず，流体現象の予測や統計的性質，あるいは基本流の安定性などに本質的な影響を及ぼすことが期待されている．





(a) (b)

図 4 (a) 2 次元の渦度の等高線，(b) 3 次元の渦度ベクトルの大きさの等値面．

数学的には，米国のクレイ研究所が 2000 年にミレニアム懸賞問題として発表した 7 つの数学の問題の一つが「ナヴィエ・ストークス方程式の初期値問題における滑らかな解の存在問題」であったことは記憶に新しい[8]．このことはナヴィエ・ストークス方程式が物理的にも数学的にも**現在に生きる方程式**であることを示していると言えるであろう．

参考文献

1) 今井　功：『流体力学』裳華房 (1976).
2) 巽　友正：『流体力学』培風館 (1980).
3) 木田重雄，柳瀬眞一郎：『乱流力学』朝倉書店 (1999).
4) V.I. Arnold & B.A. Khesin: Topological Methods in Hydrodynamics, Springer (1998).
5) H.K. Moffatt & A. Tsinober: Topological Fluid Mechanics, Proceedings of the IUTAM Symposium, Cambridge, 1989, Cambridge University Press (1990).
6) 橋本英典：縮まない流れの特質と構造，数理科学 1985 年 5 月号 pp.25–31.
7) Y. Kimura & J.R. Herring: Gradient enhancement and filament ejection for a non-uniform elliptic vortex in two-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.*, **439**, 43–56 (2001).
8) 藤田　宏，岡本　久：『ミレニアム賞　数学七つの未解決問題』Navier-Stokes 方程式の解の存在問題，森北出版 (2002).

（きむら・よしふみ，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

亀淵 迪

物理法則を支えるもの

物理法則（以下「法則」）とは，その定義からして，宇宙に存在する総ての物質が従うべき絶対的な拘束条件である．いうなれば‘神の掟’であり，モラルとしてその因ってくるところは問わない．しかし，これとは全く対蹠的な考え方もある．すなわち，法則は総ての物質に共通する普遍的性質であるから，当然，物質の宇宙における存在形態によって規定される，とするもの．この場合，法則と物質とは互いに他を規制し合う関係にあり，ちょうど‘人間’の作った‘法律’が，逆に人間を規制する関係に似ている．最初の考え方はニュートンの，第二のそれはマッハの法則観に発するものであり，以下ではそれぞれを‘N 的’，‘M 的’と呼ぶこととする．

両者の考え方の特質は，まずその‘絶対’性と‘相対’性とにある．N 的な立場は法則自体を絶対視するのみならず，かの『プリンキピア』に見られるように，絶対時間や絶対空間（慣性系）の存在を前提とする．そして何故この種の時・空間が存在し，如何にしてそれらを検証するのか等々は，副次的な問題と見なす．この点を厳しく批判したのがマッハ（右掲書）であり，時間も空間も，本来，異なる物体間の相対的な関係として定義される，と主張した．因みにこの種の見解は，ライプニッツやバークリイ（ともにニュートンと同時代人）にまで遡る．

N 的立場に基づく理論は，本質的に‘局所論’である．近接する物質を遠方の存在よりも重視するもので，通常の物理理論はこの方式に拠っている．これに反し M 的な理論は‘大域論’であり，原理的には，宇宙に存在する総ての物質の存在を斉しく考慮する．対象は宇宙背景の中におかれたときにのみ物理的意味を持ち，法則性もそこから生じる．電磁気学の‘遠隔作用論’はその好例である．

M 的構想具体化の契機として，まず‘マッハ原理’がある．慣性は当の物体それ自体の性質ではなく，その周囲にある総ての物質との（重力）相互作用の結果である，とする．この考えは慣性・重力両質量間に内的関連の存在を示唆する．

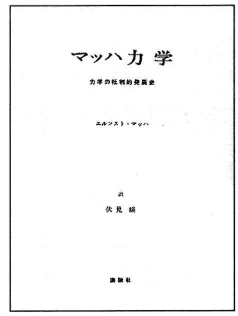
M 的に見た‘慣性系で静止した物体（重力質量 m_g）’とは，この物体に周囲の総ての物質が及ぼす重力がちょうど釣り合って合力 $=0$ となった状態のことである．また，これに外力を加えたときに示される応答が，当の物体の慣性（慣性質量 m_i）となる．宇宙における物質密度 $\rho=$ 一定とするとき，球殻 $[r, r+dr]$ 上にある物質の量は r^2 に比例するので，$r=0$ にある物体に対して，任意の単位立体角中にある総ての物質が及ぼす逆 2 乗則の力の総和は発散する．マッハの構想は，従って，そのままでは式に乗らない．

しかし膨張宇宙が事態を救う．1953 年にシアマが「慣性の起源」と題する論文を書き，この問題を見事に解明した〔D.W. Scima, *Month. Notices Roy. Astro. Soc.* **113** (1953) 34〕．‘オルバースの背理’解決の場合と同様に，‘重力的ドップラー効果’が働くとして，まず彼は r の上限を $R=c/H_0$ と取る（H_0 はハッブル定数）．また‘慣性系’にある物体に外力を加えた場合，重力との釣り合いは破れるが，総ての力の合力 $=0$ となるような適当な座標系に移れば，ここでの物体は静止する（運動の第一法則）．この種の座標系が時間的にどのように移動するかを示す式が，物体の運動方程式に他ならない．彼は直線運動や回転運動の場合に簡単なモデル計算を行い，それぞれに対する運動方程式を導き，かつ $m_i=Km_g$ を示した．ただし K は宇宙の構造（$H_0, \rho, \cdots$）から決まる普遍定数である．ここでは N 的理論で仮定された諸関係式が，M 的考察からは導出されている．

上の結果は古典力学に関する一例に過ぎず，その現代的意義については多々異見もあろう．しかし年来の‘M 的’ファンである筆者は，物理法則一般に対しても，上記のような M 的考察が有効ではなかろうか，と一人ひそかに空想している——マッハ原理の一般化を夢見て，である．そこでは，物理法則は宇宙の歴史や構造によって支えられていることになる．何れにせよ，N 的・M 的両方法は，物理法則の探求において，互いに相補的な役割を果たすべきもの，と筆者には思われる．

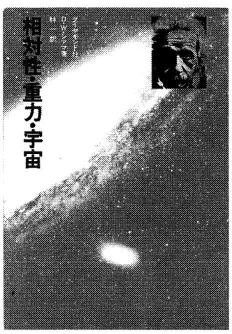
（かめふち・すすむ，筑波大学名誉教授）

マッハ 力学 力学の批判的発展史



伏見譲訳，A5 判，485 頁，絶版，講談社 (1969)
（なお「ちくま学芸文庫」に『マッハ力学史』（上・下）として岩野秀明訳がある）

左頁に述べたように，ニュートン力学における概念構成の弱点を衝き，それに徹底的な批判を加えた書として知られる．本書で示唆された‘マッハ原理’はアインシュタインの命名であり，彼の一般相対論構築の際に大きな影響を与えたといわれる．なお巻末の伏見康治氏による解説「マッハと現代物理学」も興味深く，本文に先立って一読されることを勧めたい．

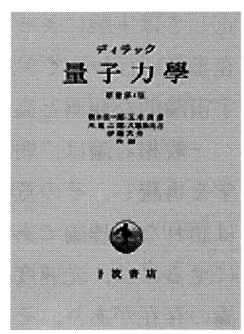


相対性・重力・宇宙

D.W. シアマ著，林一訳，四六判，246 頁，絶版，ダイヤモンド社 (1968)

原題は‘The Unity of the Universe’. 1959 年に出た本であり，第 1 部の宇宙論はいささか時代遅れであろうが，本書の白眉は第 2 部の，マッハ原理に基づき慣性の起源を論じた第 6～9 章にある．ここでは左掲の原論文が基礎となっている．本書により筆者は，初めて，マッハ原理の何たるかを知らされたと思う．名著とは言えないまでも，筆者にとっての良書ではある．

ディラック 量子力学（原著第四版）

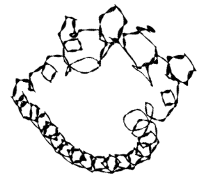


朝永・玉木・木庭・大塚・伊藤訳，A5 判，488 頁，重版未定，岩波書店 (1968)

古典力学のマッハに対して量子力学から一冊となると，ディラックを措いて他にはあるまい．天下の名著に何をいまさらと思われるかもしれないが，あえてここに取り上げたのは，次の二つの名言を伝えておきたかったからである．“美しい量子力学がここにある”——山口嘉夫氏（素粒子論）．“ディラックのほうがノイマン（『量子力学の数学的基礎』）よりも数学的である”——前原昭二氏（数学基礎論）．

アインシュタイン方程式

時空の構造と物質の分布



辻川 信二

1. はじめに

一般相対論はアインシュタインにより，1916 年に構築された理論であり[1]，現在では，宇宙の進化，ブラックホールなどの高密度天体の物理を理解する上で不可欠な存在となっている．その基盤となるアインシュタイン方程式は，時空構造を物質分布と結びつける式であり，アインシュタインの様々な試行錯誤により得られた式である．その正しさは実験によって保証されるものであり，現在までに行われてきた太陽系における重力実験や，宇宙論的な観測と高い精度で一致している．

一般相対論は，弱い重力の極限でニュートン力学を再現し，その意味でニュートンの功績なしには語れない理論である．また，一般相対論の構築に至るには，光速度不変の原理を用いた特殊相対論の存在があり，その背景には，マックスウェルが 19 世紀の後半に築きあげた電磁気学の存在があった．一般相対論は，重力を含む形で特殊相対論を発展させたもので，重力の存在は時空の歪みに由来する．アインシュタインは，当時発展しつつあったリーマン幾何学の知識を用いて，このことを数学的に定式化することに成功した．

一般相対論の解析にはテンソル量を用い，数学的な見かけ上の煩雑さがあるため，多くの人が難しいと考えるようである．しかし，基本的な計算法を習得すれば，一般相対論は複雑な学問でなく，アインシュタイン方程式の単純かつ明快な美しさに感動することであろう．本稿では，アインシュタイン方程式についての解説を行い，その宇宙論への応用とニュートン力学との関連について説明する．さらに，アインシュタインが導入した宇宙項の，近年の観測における役割を考える．

2. アインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式は，時空の構造を特徴づける幾何学的な量であるアインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ と，物質を特徴づけるエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を結びつける関係式で，

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

と表される．ここで，$G = 6.67 \times 10^{-11}$ [N·m²/kg²] は重力定数，$c = 3.0 \times 10^{8}$ [m/s] は光速である．

左辺のアインシュタインテンソルを，数学的にどのように計算するのかをまず述べる．空間の歪みがなくユークリッド幾何学が成り立つ場合，3 次元空間内でベクトルとして $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$ 離れている 2 点の距離は，$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ と表される．相対論では，空間 3 次元に時間 t も含めた 4 次元の時空を考える．歪みのない 4 次元時空（ミンコフスキー時空と言う）における微小距離の 2 乗 ds^2 は，上記の dr^2 を拡張し，$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ と定義される．これは特殊相対論における世界距離と呼ばれ，光に対して $ds^2 = 0$ となっている．重力を含む一般

相対論では，時空の歪みがあり，微小世界距離の2乗は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2}$$

と拡張される．ここで，$g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれ，時空の構造によって決まる係数であり，また，dx^μ は反変ベクトルと呼ばれ，その成分は $dx^0 = cdt, dx^1 = dx, dx^2 = dy, dx^3 = dz$ である．式 (2) において，上付きと下付きの文字で同じものが現れた場合，それらの文字について，0 から 3 までの和をとると約束する．ミンコフスキー時空では，$g_{00} = -1, g_{11} = 1, g_{22} = 1, g_{33} = 1$ で，それ以外の $g_{\mu\nu}$ は 0 である．

ミンコフスキー時空で質点に力が働かない場合，その位置 $\boldsymbol{r}$ はニュートンの運動方程式 $d^2\boldsymbol{r}/dt^2 = 0$ に従う直線運動をする．歪んだ時空の場合，質点はその歪みによる影響を受け，質点の"直線運動"に相当する式（測地線）は，

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \tag{3}$$

と一般化される．τ は質点の軌道を特徴づけるパラメータで，質点の固有時間と考えることもできる．$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ はクリストフェル記号と呼ばれ，計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{g^{\mu\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right) \tag{4}$$

と表される．ミンコフスキー時空では，$g_{\mu\nu}$ は定数であるため，$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ の成分はすべて 0 である．曲がった時空では，$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ の成分のうち 0 でないものが残り，これから式 (3) の右辺に実効的な力，つまり重力が現れる（図 1 参照）．このようにクリストフェル記号は，時空の歪み具合とその結果としての重力の強さを特徴づけている．

曲がった空間では，あるベクトルを微小面の周りで 1 周させたとき，1 周後のベクトルはもとの方向と一般的にずれる．このずれの指標となるのが，リーマンテンソル $R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}$ であり，この 1 番目と 3 番目の添え字を等しくして和を取った量：$R_{\mu\nu} := R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ を，リッチテンソルと言う．リッチテンソルは，クリストフェル記号を用いて $R_{\mu\nu} = \partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}/\partial x^\alpha - \partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}/\partial x^\nu + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}$ と書ける．さらに，リッチテンソルから作られるスカラー量：$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ を，スカラー曲率と言う．これらを用いて，**アインシュタインテンソル**は，

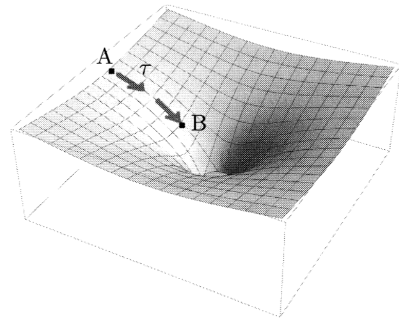


図 1　パラメータ τ で特徴づけられる曲がった時空における粒子の測地線．τ の増加に伴い，点 A: $\boldsymbol{x}(\tau_A)$ から点 B: $\boldsymbol{x}(\tau_B)$ まで動く．時空の歪みにより，質点に重力が働く．

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{5}$$

と定義され，$G_{\mu\nu}$ は時空の構造（計量テンソル $g_{\mu\nu}$）によって決まる純粋に幾何学的な量である．

アインシュタインは，$G_{\mu\nu}$ を物質を記述する**エネルギー運動量テンソル** $T_{\mu\nu}$ と結びつけ，アインシュタイン方程式 (1) を導出した．ここで，$T_{\mu\nu}$ の成分のうち，T_{00} はエネルギー密度，T_{0i} はエネルギー流束，T_{ij} は圧力テンソルを表す（ただし，$i, j \neq 0$）．なぜ式 (1) の左辺が，$R_{\mu\nu}$ のような単独のテンソルではなく，$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, R$ の組合せからなるテンソル (5) となるのであろうか．

$T_{\mu\nu}$ は，いわゆる保存則を満たしている必要があり，これは共変微分と呼ばれる曲がった時空での微分を用いて，$T_{\mu\nu;\nu} = 0$ と表現できる．もし式 (1) の左辺が $R_{\mu\nu}$ であるとすると，これは関係式 $R_{\mu\nu;\nu} = 0$ を一般的に満たさない．アインシュタインは，関係式 $G_{\mu\nu;\nu} = 0$ を満たすテンソル $G_{\mu\nu}$ として，上記の (5) を導出した．

方程式 (1) の右辺の係数 $8\pi G/c^4$ は，質量 M の天体が作る弱い重力場中において，ニュートン力学を再現することから決定される．弱い重力場における計量 $g_{\mu\nu}$ は，ミンコフスキー時空の計量を $\eta_{\mu\nu}$，それからのずれを $h_{\mu\nu}$ とすると，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ と書ける（ただし，$|h_{\mu\nu}| \ll 1$）．また，ある慣性系から見た質点の速度を v，経過時間を t とする

と，v は光速度 c に比べて十分小さいという近似の下で，t は質点の固有時間 τ に等しいと近似できる．上記の近似の下で，測地線の方程式 (3) は，

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2}+c^2\Gamma^\mu_{00}\simeq 0 \tag{6}$$

となる．ここで，Γ^μ_{00} の空間成分 $\mu=i$ は，弱い重力場（$h_{\mu\nu}$ の 2 次以上を落とす）において，$\Gamma^i_{00}\simeq -(1/2)\delta^{ij}\partial h_{00}/\partial x^j$ と近似でき（δ^{ij} は，$\delta^{ii}=1$ でそれ以外は 0)，式 (6) より，空間成分 $\mu=i$ に対して，運動方程式

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}\simeq -\delta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\Phi,\ \text{ただし}\ \Phi=-\frac{c^2h_{00}}{2} \tag{7}$$

を得る．これは，重力ポテンシャル $\Phi=-GM/r$ に対するニュートンの運動方程式：$d^2\boldsymbol{r}/dt^2=-\nabla\Phi$ に相当し，$h_{00}=-2\Phi/c^2=2GM/(c^2r)$ であることが分かる．

次に，リッチテンソルの (00) 成分が，$R_{00}\simeq\partial\Gamma^i_{00}/\partial x^i\simeq\Delta\Phi$ であることを用いて，アインシュタインテンソルの (00) 成分は，$G_{00}\simeq(2/c^2)\Delta\Phi$ で与えられる．エネルギー密度 T_{00} は，質量密度 ρ を用いて $T_{00}=\rho c^2$ と表せる（エネルギー E と質量 m の関係式 $E=mc^2$ を単位体積あたりで表記したもの）．アインシュタイン方程式を $G_{\mu\nu}=\alpha T_{\mu\nu}$ の形に書くと，(00) 成分から，$\Delta\Phi=(\alpha c^4/2)\rho$ が得られ，これはニュートン力学におけるポアソン方程式 $\Delta\Phi=4\pi G\rho$ に一致する必要がある．この要請から，係数 α が $\alpha=8\pi G/c^4$ と決まる．

3. 宇宙論への応用

アインシュタイン方程式 (1) を，宇宙論に応用してみよう．様々な観測から，現在の宇宙は凸凹が小さくほぼ一様，かつ空間のどの方向にもほぼ等方的であることが知られている．この一様等方な宇宙を表す計量は，空間座標として極座標を取り，

$$ds^2=-c^2dt^2+a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2}+r^2d\theta^2+(r^2\sin^2\theta)d\phi^2\right] \tag{8}$$

と表せる．$a(t)$ はスケール因子と呼ばれ，宇宙の膨張とともに，空間 3 次元の各方向に等方的に時間 t の関数で変化する量である．K は宇宙の曲率を表し，$K>0$ が閉じた宇宙，$K<0$ が開いた宇宙，$K=0$ が平坦な宇宙に対応する．

この計量に対して，アインシュタインテンソルの (00) 成分と (ii) 成分を計算すると，$G_{00}=(3/c^2)(H^2+Kc^2/a^2)$, $G_{ii}=-(a^2/c^2)(3H^2+2\dot{H}+Kc^2/a^2)$ となる．ここで，ドットは時間 t による微分を表し，$H=\dot{a}/a$ はハッブルパラメータと呼ばれる宇宙の膨張率を表す量である．一方，エネルギー運動量テンソルの (00) 成分と (ii) 成分は，$T_{00}=\rho c^2$, $T_{ii}=a^2p$（ρ は質量密度，p は圧力）である．よって，アインシュタイン方程式から

$$3H^2=8\pi G\rho-3Kc^2/a^2\,, \tag{9}$$

$$\ddot{a}/a=-(4\pi G/3)(\rho+3p/c^2) \tag{10}$$

を得る．式 (9) は (00) 成分の式であり，式 (10) は (00) 成分と (ii) 成分の式から，関係式 $\ddot{a}/a=H^2+\dot{H}$ も用いて，Kc^2/a^2 を消去した式である．

ニュートン力学において，式 (10) と類似の式を導き出してみよう．いま，任意の一点を中心とする半径 a の球（体積 $V=4\pi a^3/3$）を考え，その球の内部は，圧力の無視できる物質で一様に占められているとする（図 2 を参照)．球の質量 M は，その密度を ρ として，$M=\rho V$ である．その球の表面にある質量 m の質点を考えると，この質

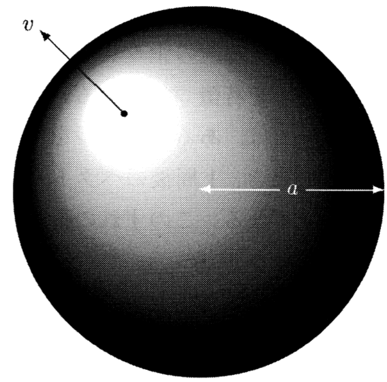


図 2 半径 a の球（質量 M）の表面にあり，球の半径の変化とともに，速度 $\boldsymbol{v}$ で動く質量 m の質点．

点が受ける重力の大きさは，半径 a の球の全質量 M が球の中心に集中したとして質点との間に働く重力の大きさ GmM/a^2 に等しい．すると，時刻 t における質点のニュートンの運動方程式は，

$$m\ddot{a} = -G\frac{mM}{a^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho \quad (11)$$

である．これは，式 (10) において，圧力 p が 0 のときに対応している．圧力 p は相対論的な効果によるもので，ニュートン力学においては無視できるが，過去に宇宙が輻射優勢期であったときなどでは重要な役割を果たす．

また，同様な状況において式 (9) を変形すると，

$$\frac{1}{2}m\dot{a}^2 - G\frac{mM}{a} = -\frac{1}{2}Kmc^2 \quad (12)$$

を得る．これは，質点の運動エネルギー $(1/2)m\dot{a}^2$ と重力による位置エネルギー $(-GmM/a)$ の和 E が一定値 $(-Kmc^2/2)$ に保たれることを意味する．ニュートン力学でよく知られているように，E の値が正のとき質点は無限遠に飛び去り，負のとき質点はもとの位置に戻り，0 のときはぎりぎり無限遠に到達する．宇宙論では，この状況は $K < 0$ が開いた宇宙，$K > 0$ が閉じた宇宙，$K = 0$ が平坦な宇宙に対応している．観測的に現在の宇宙は $K = 0$ の場合に近く，これは宇宙初期の加速膨張（インフレーション）からの帰結であると考えられている．

以上の議論から，式 (9) と式 (10) はそれぞれ，ニュートン力学における**エネルギー保存則**と**運動方程式**に対応していることが明らかになった．(9) の両辺に a^2 を掛けて t で微分し，(10) を用いると，連続方程式と呼ばれる式

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p/c^2) = 0 \quad (13)$$

を得る．(9), (10), (13) のうち独立な式は 2 つで，実際に宇宙の進化を調べる際によく用いられるのは，(9) と (13) である．状態方程式と呼ばれる量：$w := p/(\rho c^2)$ を定義すると，w が定数のとき，(13) は容易に積分でき，

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)} \quad (\rho_0 \text{は定数}) \quad (14)$$

となる．圧力のない物質 $(w = 0)$ のとき，$\rho \propto a^{-3}$ である．輻射の場合，統計力学から $w = 1/3$ であることが知られており，$\rho \propto a^{-4}$ である．

平坦な宇宙 $(K = 0)$ で，(14) を (9) に代入して解くと，$w \neq -1$ のとき，スケール因子の変化は

$$a \propto t^{2/(3(1+w))} \quad (15)$$

となる．ダストと輻射の場合，それぞれ，$a \propto t^{2/3}$，$a \propto t^{1/2}$ である．$w = -1$ のときは，(14) と (9) により ρ と H が一定で，$\dot{a}/a = H$ を積分し，$a \propto e^{Ht}$ という指数関数的な解となる．このように，アインシュタイン方程式を解くと，自然に宇宙が膨張する解を与える．

4. アインシュタインと宇宙項

アインシュタインが一般相対論を提唱した当時，宇宙は膨張せず定常的であると多くの人が考えており，アインシュタイン自身も静的な解を構築しようとした．静的な宇宙の場合，$a =$ 一定であるから，$\ddot{a} = 0$ であり，式 (10) の左辺は 0 である．その一方で，ρ と p が負でない通常の物質に対して，式 (10) の右辺は負である．つまり，静的宇宙を作るためには，式 (10) の右辺を打ち消して 0 にするような項が必要である．

アインシュタイン方程式に，このような項を付け加える自由度はある．時空の計量 $g_{\mu\nu}$ は一般的に，$g_{\mu\nu;\nu} = 0$ という関係式を満たしている．この性質を用いると，式 (1) に，$\Lambda g_{\mu\nu}$ （Λ は定数）という項を付け加えてもよく，この場合，式 (1) は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (16)$$

となる．Λ を**宇宙項**と呼び，静的宇宙を作るためにアインシュタインが導入した正の定数である．このとき，例えば式 (9) と式 (10) は補正を受け，

$$3H^2 = 8\pi G\rho - 3Kc^2/a^2 + \Lambda c^2, \quad (17)$$

$$\ddot{a}/a = -(4\pi G/3)(\rho + 3p/c^2) + \Lambda c^2/3 \quad (18)$$

となる．式 (18) から，宇宙項は重力と逆向きの斥力のように働くことが分かる．

圧力の無視できる物質が支配的な宇宙において，静的な解（$\ddot{a}=0, H=0$）が実現するには，式 (17) と式 (18) から

$$\rho = \Lambda c^2/(4\pi G), \quad a = \sqrt{K/\Lambda} \tag{19}$$

であればよい．$\Lambda > 0$ より，閉じた宇宙（$K > 0$）で静的な宇宙が実現する．

1920 年代後半に，ハッブルにより，遠方の銀河の赤方偏移（光の波長が伸びること）が発見された．これは宇宙が膨張している証拠であり，光の波長は膨張によるドップラー効果で引き伸ばされる．これにより，静的宇宙は観測的に棄却され，アインシュタインが導入した宇宙項は，少なくとも膨張宇宙を実現するためには必要がない．$K=0$ の下で，宇宙初期の輻射優勢期には，スケール因子は $a(t) \propto t^{1/2}$ と変化し，その後は物質優勢期に入り，スケール因子は $a(t) \propto t^{2/3}$ と変化する．

アインシュタインは，晩年になって，宇宙項を導入したことを“生涯最大の失敗”と言った．ところが，1998 年に発表された遠方の超新星の観測データにより，現在の宇宙が加速膨張をしていることが発見された[2)]．加速膨張の場合，$\ddot{a} > 0$ であるから，式 (10) より，ダストや輻射のような通常の物質ではこの条件を満たせない．加速膨張を起こすには，$p < -\rho c^2/3$ ($w < -1/3$) を満たす負の圧力を持つ物質，もしくは宇宙項の存在が必要である．宇宙項は，エネルギー密度 ρ が時間変化しない場合に対応し，このとき，$w=-1$ である．

このように，現在の加速膨張を引き起こす原因となる物質を**暗黒エネルギー**と呼び，現在の宇宙のエネルギーの約 70 % を占めているものの，その起源は明らかになっていない[3)]．状態方程式 w が一定のとき，最新の観測から，95 %の確からしさで $-1.11 < w < -0.86$ という制限が得られている[4)]．宇宙項（$w=-1$）は，様々な観測と矛盾のない模型であり，元々アインシュタインが閉じた静的宇宙を作るために宇宙項が，現在の加速膨張を説明する源として蘇ったことになる．

5. 終わりに

1990 年代からの観測技術の急速な進歩により，宇宙の過去から現在に至る進化が高い精度で明らかになり，一般相対論の正しさが様々な角度から検証されてきた．超新星の観測だけでなく，宇宙背景輻射の温度揺らぎの観測，宇宙の大規模構造などの観測から，暗黒エネルギーと宇宙初期のインフレーション期の存在が強く裏付けられている．

インフレーションの場合，もしその起源が宇宙項であるとすると，加速膨張が終わらず輻射優勢期につながらないため，その起源は，素粒子物理で現れるスカラー場であると多くの人が考えている．暗黒エネルギーの場合，加速膨張が終わる必要がないため，その起源は宇宙項であってもよい．ただし，素粒子理論において現れる真空のエネルギーが宇宙項の起源であるとすると，その値は現在観測されている暗黒エネルギーの値と極端に異なるという問題を抱えている．そのため，超弦理論のようなすべての力の統一を目指す理論を用いて，暗黒エネルギーの起源を探る研究が活発に行われている．また，一般相対論を拡張した重力理論における暗黒エネルギーの研究も精力的に行われており，観測的，実験的に宇宙項模型からのずれを探ることが重要な課題となっている．

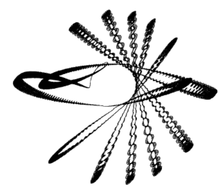
アインシュタイン方程式が構築されて 100 年近くが経過したいま，宇宙項その他の問題を通して，一般相対論の存在はますますその輝きを増している．

参考文献

1) A. Einstein, *Annalen Phys.* **49**, 769 (1916).
2) A. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
3) E.J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
4) E. Komatsu *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 330 (2009).

（つじかわ・しんじ，東京理科大学理学部）

ヤン・ミルズ理論とその物理



風間 洋一

1. はじめに

ヤン・ミルズ理論（あるいは非可換ゲージ理論）は現在知られている自然界の 4 つの力，すなわち，電磁気力，弱い力，強い力，および重力，のすべてを記述する基本的な枠組みとして認められている美しい理論である*1)．この理論は，構造的には，よく知られたマックスウェルの電磁気学を，次節で述べるような考え方に従って拡張したものであるが，その物理との関わり方は電磁気の場合とは大きく異なっている．電磁気現象はすでに日常のマクロなスケールで重力と共に主役を演じ，マックスウェル方程式の解で記述される．すなわち，方程式と現象が直接的に結びつくので，本特集のテーマにふさわしい．これに対して，ヤン・ミルズ方程式の場合には，それがマックスウェル方程式の拡張であるにもかかわらず，その古典的な振舞いから物理を読み取ることができない．その理由は次節以下で述べるが，一言で言えば，ヤン・ミルズ理論では非線形な量子効果が本質的に重要であるためである．従って，ヤン・ミルズ方程式というよりも，ヤン・ミルズ理論という形で包括的に捉えて初めてその物理を議論することができる．以下では，そのような意味で電磁場に比べて遙かに捉えにくいヤン・ミルズ場について，それが発見された経緯，その構造，そしてそれが惹き起こす物理をなるべくわかりやすく述べることにする．

2. ヤン・ミルズ理論とその性質

2.1 マックスウェル理論とゲージ原理

ヤン・ミルズ理論がどのようにして発明されたかを理解するには，そのプロトタイプであるマックスウェルの電磁気学と，それを背後で支配するゲージ対称性について復習しておく必要がある．

電磁気学の主役は，無論のこと電場 $\vec{E}$ と磁場（磁束密度）$\vec{B}$ であり，それは次のマックスウェル方程式を満たす：

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{\jmath} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,. \tag{4}$$

これらの方程式は，上から順に，(1) クーロンの法則，(2) 磁荷の非存在，(3) ファラディーの電磁誘導の法則，(4) アンペール・マックスウェルの法則，を表している．

さて，電場と磁場は全部で 6 成分あるが，(2) と (3) を "解く" ことにより，"ポテンシャル" の微分で表すことができる*2)．すなわち，

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A}\,, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\,. \tag{5}$$

ϕ は静電ポテンシャル，$\vec{A}$ はベクトルポテンシャルと呼ばれる．ここで重要なことは，$\vec{E}$ や $\vec{B}$ が，$\theta = \theta(t,\vec{x})$ を時空点の任意関数として，次のような「ゲージ変換」と呼ばれる変換に対して不変になっていることである：

$$\phi \to \phi' = \phi - \partial_t\theta\,, \tag{6}$$

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\theta\,. \tag{7}$$

これがなぜ重要であるかを説明するために，まず便利

*1) 但し重力の場合は他の 3 つの力とは異なる側面を持つので，狭義のヤン・ミルズ理論には入れないこともある．

*2) 以下では簡単のため光速度 c を 1 とする単位系を用いる．このときには $\mu_0 = 1/\epsilon_0$ となる．

な記号を導入しておこう．ϕ と $\vec{A}$ を併せて，4 成分の場 $A_\mu, _{(\mu=0,1,2,3)}$ を $A_\mu = (-\phi, \vec{A})$ と定義する．また，時間座標 t と空間座標 $\vec{x}$ を組にして，$x^\mu = (t, \vec{x})$ および $x_\mu = (-t, \vec{x})$ と定義し，それによる微分をそれぞれ $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, $\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ と記すことにする*3)．すると，上記のゲージ変換 (6) および (7) はまとめて簡潔に

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta \tag{8}$$

と書ける．しかも，A_μ を用いると，この変換で不変な量を容易に作ることができる．それは「場の強さ」と呼ばれる次のような量である：

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,. \tag{9}$$

実際変換 (8) を施すと，$\partial_\mu \theta$ の部分がキャンセルして $F_{\mu\nu}$ が不変に留まることが直ちにわかる．$F_{\mu\nu}$ は μ, ν の入れ替えに対して反対称であるから 6 つの独立な成分を持ち，しかもゲージ変換に対して不変な量である．これはまさに電場と磁場の持つ性質に他ならない．実際 (5) と比較すると，$F_{i0} = E_i, _{(i=1,2,3)}$, $F_{12} = B_3, F_{23} = B_1, F_{31} = B_2$ となっていることが容易にわかる．さらに，電荷密度と電流密度を組にして $j_\mu = (-\rho, \vec{j})$ と記すと，マックスウェル方程式の残りの部分，すなわち (1) と (4)，が次のような美しい形で書けることが確かめられる：

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 j_\nu \,. \tag{10}$$

（この式では，アインシュタインにならい，ペアで現れる添え字 μ に関する和記号 $\sum_\mu$ を省略した．以下同様の記法を用いる．）

さてここでこの方程式の右辺に着目しよう．自然界においては，電磁場を生み出す源（source）である j_ν は，（ほとんどの場合）電子の密度とその流れを表しており，ミクロには電子の量子力学的な波動関数 ψ を用いて表される．この ψ はゲージ変換に対してどのように変換すると考えられるだろうか．そのヒントは，A_μ に対する (8) のゲージ変換を次のように見直すことから得られる．A_μ をある固定点 x_0 から任意の時空点 x まで積分したものを指数とする次の複素量を考える：

$$W(x) \equiv \exp\left(ie \int_{x_0}^{x} A_\mu(y) dy^\mu \right) . \tag{11}$$

e は電子の電荷を表す．これに $\theta(x_0) = 0$ を満たす勝手な関数 $\theta(x)$ を用いて (8) のゲージ変換を行うと，

$$\begin{aligned} W(x) &\rightarrow \\ W'(x) &= \exp\left(ie \int_{x_0}^{x} (A_\mu(y) + \partial_\mu \theta(y)) dy^\mu \right) \\ &= e^{ie\theta(x)} W(x) \end{aligned}$$

を得る．すなわち，$W(x)$ に対するゲージ変換とは絶対値が 1 の複素数 $S(x) \equiv e^{ie\theta(x)}$ の掛け算として理解される．そのような量の集合は $S^\dagger S = 1$（ユニタリー性）を満たす 1 次元の複素行列とも言い換えられ，（掛け算に対して）1 次元のユニタリー群 $U(1)$ と呼ばれる群をなす．

このことから，電子の複素波動関数 $\psi(x)$ に対するゲージ変換として，

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(x)\psi(x) \tag{12}$$

を考えるのが自然であることがわかる*4)．しかしながら，ひとつ見かけ上困ったことがある．それは，$\psi(x)$ の微分 $\partial_\mu \psi$ がきれいに変換しないことである．実際 $\partial_\mu \psi$ のゲージ変換を考えると，$\partial_\mu (S\psi) = (ie\partial_\mu \theta) S\psi + S(\partial_\mu \psi)$ となり，第一項が余分である．

1929 年，ワイル（H. Weyl）はこの困難を逆手にとり，それを解決するためにこそゲージ場 A_μ の存在理由があるのだという「ゲージ原理」の考えを提案した．すなわち，∂_μ の代わりに A_μ も含んだ「共変微分」D_μ を

$$D_\mu \psi \equiv (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \,. \tag{13}$$

のように定義すると，$D_\mu \psi$ が ψ と同じゲージ変換をすることを示したのである．実際この量のゲージ変換を調べてみると，$D'_\mu \psi' = (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu \theta))(S\psi) = S(D_\mu \psi)$ となる．すなわち，A_μ の変換から生ずる項と，上で述べた余分な項がちょうどキャンセルして，うまくいっていることがわかる．このことは，裏返して言えば，ゲージ変換に対する対称性の要求を「原理」して用いることによって，ゲージ場と物質との相互作用の形を決めることができることを意味する．

2.2 ヤン・ミルズ理論の登場

さて準備が整ったので，ヤン・ミルズ理論がどのように発見され，どのような構造を持つものなのかを，ヤン（C.N. Yang）とミルズ（R.L. Mills）による 1954

*3) これらは，相対性理論の記法であるが，以下で相対性理論自体の詳しい知識は仮定しない．

*4) このことは，アハロノフ・ボーム効果と呼ばれる現象を通じて実験的にも検証されている．

年の原論文[1]に即して述べることにしよう[*5]．ヤンはこの数年前から，パウリの解説論文を通じて前述のワイルのゲージ原理の考え方を知って感銘を受け，これを核力の世界で近似的に成り立っている「アイソスピン対称性」に対しても適用すべきではないかと考えていた．周知のように，原子核は陽子 p と中性子 n から構成されているが，これらの粒子は質量がほぼ等しく，またその相互作用も，核力に比してうんと弱い電磁気力を無視すれば，非常に似通っている．この事実に着目したハイゼンベルグ（W. Heisenberg）は 1932 年次のような大胆なアイデアを提案した．すなわち，電荷の違いを無視する限りにおいて p と n は（核子と呼ばれることになる）同じ粒子の異なる 2 つの状態と見なすべきだと言うのである．そしてそれがあたかもスピン角運動量が $(1/2)\hbar$ の粒子が，スピンが “上向き” と “下向き” の状態を持つことと似ていることから，そのスピンに対応する概念を「アイソスピン」と名付けた．このアイソスピン対称性の考えはさらにパイ中間子が関わるプロセスを含む一般の核力相互作用に対しても拡張され大いに成功を納めた．

さて，こうした状況で，ヤンは次のような疑問に突き当たった．アイソスピン対称性とは，電磁気力を無視する限りにおいて，アイソスピンの向きはすべて同等であり，本質的な物理的違いがないことを言っている．つまり，陽子と中性子の違いは約束事に過ぎない．通常はどちらを陽子と呼びどちらを中性子と呼ぶかをある時空点で定めると，後はすべての時空点でその約束に従うという風に取り扱っている．しかし，このように，ある点での約束をいくらでも離れた他のすべての点で強要することは，通常の物理理論の成功を支えている局所場の概念と抵触するのではないのか．本来，理論は各点各点で勝手なアイソスピン回転を施すことに対して不変になっているべきではないのか．これはまさしくアインシュタインが特殊相対論から一般相対論に向かった考え方と同じである．

こうして，ヤンはワイルの考えに従って，アイソスピン対称性をゲージ対称性に格上げする試みに着手した．しかしながらこの試みはそう簡単ではなく，漸く 1953 年の夏，ミルズとの共同研究の下で完成することになる．

基本的な考え方は前節で述べた電磁場の場合と同じである．電子の場 $\psi(x)$ の代わりに 2 成分の核子の場 $\vec{\psi}(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix}$ を考え，$U(1)$ ゲージ変換の代わりに，行列式が 1 である 2 行 2 列のユニタリー行列で表される $SU(2)$ ゲージ変換を考えるのである．これを $S(x)$ と記すと，$S^{\dagger}(x)S(x) = 1$ を満たし，ゲージ変換は (12) と同様

$$\vec{\psi}(x) \to \vec{\psi}'(x) = S(x)\vec{\psi}(x) \tag{14}$$

と書ける．次に，電荷 e に対応するアイソスピンの大きさを g と記し，トレース（対角成分の和）がゼロの 2×2 エルミート行列に値を持つ新しいゲージ場 B_μ を導入して，「共変微分」を $D_\mu\psi \equiv (\partial_\mu - igB_\mu)\psi$ のように定義する．今度は電磁場のときの論理とは逆に，これが (14) と同様に変換するように，すなわち $D'_\mu\psi' = S(D_\mu\psi)$ が成り立つように，B_μ のゲージ変換則を決めなければならない．これは容易に求まって，

$$B'_\mu = SB_\mu S^{-1} + \frac{1}{ig}\partial_\mu SS^{-1} \tag{15}$$

を得る[*6]．電磁気の場合と異なり，B_μ および S が行列なため可換でないので，第一項の $SB_\mu S^{-1}$ は B_μ と等しくない．

ここまでは簡単だが，次に，電磁気の場合のゲージ不変な場の強さ $F_{\mu\nu}$ にあたるものはどのように構成すればよいであろうか．これこそがヤンがなかなか突破できないでいた壁だった．それは 2 つの問題を含んでいる．一つは，電磁気の場合を真似て $\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ という組合せを考えても，それはゲージ変換に対してきれいな変換性を示さないことであり，もう一つは，これに何か補正項を加えて修正しようとしてみてもゲージ不変な量は作れそうもないことである．実は答えを知ってしまえば，これらはそれほど難問ではないのだが，何事も最初は容易でない．鍵は，電磁場の場合の形 $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ が共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ を用いて，$\frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu]$ と書けることに気付くことである．（ここで $[a, b]$ は $ab - ba$ で定義される「交換子」を表す.）この考えは $SU(2)$ の場合にも直ちに適用できる．今度は $D_\mu = \partial_\mu - igB_\mu$ を用いると

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] \\ &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\mu B_\mu - ig[B_\mu, B_\nu] \end{aligned} \tag{16}$$

---

*5）実はその頃幾つかの異なる視点から同様な理論に到達しようとしていた人々がいた．パウリ，ショー，そして日本の内山である．このあたりの事情は，いろいろな意味で実に興味深いのであるが，本稿の主題からは大分逸脱するのでここでは割愛する．興味のある読者は，ゲージ理論の誕生について詳しく解説した優れた書物[2]を参照されたい．

*6）こうして得られた新たな行列場 B'_μ はやはりエルミートでトレースがゼロになっている．

という表式が得られる．この式がゲージ場について2次の項を含んでいることに注目しよう．この非線形な項こそヤンがなかなか思いつかなかった項であり，ヤン・ミルズ理論において決定的に重要な役割を果たすことになるのである．さて $F_{\mu\nu}$ は共変微分のみを用いて作った量であることから，それがゲージ変換に対してどう変換するかは容易にわかる．結果は

$$F'_{\mu\nu} = SF_{\mu\nu}S^{-1} \tag{17}$$

となる．これはきれいな変換則であるが，$U(1)$ の場合と異なり，ヤン・ミルズ理論の場の強さはゲージ不変量ではないことを示している．

それでは，ゲージ不変な量はどのようにして作ればよいのであろうか．よく知られたトレースの性質を用いると，(17) から $\mathrm{Tr}(F'_{\mu\nu}) = \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu})$ が得られ，これがゲージ不変であることがわかるが，今の場合はそもそも $\mathrm{Tr}F_{\mu\nu} = 0$ であるので意味がない．結局，最も簡単なゲージ不変量は，相対性理論の要請を考慮に入れると，$F_{\mu\nu}$ の2次の量である $\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ であることがわかる[*7]．

これがどのようなものかを見るために，行列場 B_μ および $F_{\mu\nu}$ をよりあからさまに書こう．独立な成分を勘定すればわかるように，2次元のトレースがゼロのエルミート行列は，次の3つの基本的な行列 $t_a, {}_{a=1,2,3}$ の実数係数の和で書ける：

$$t_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$t_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

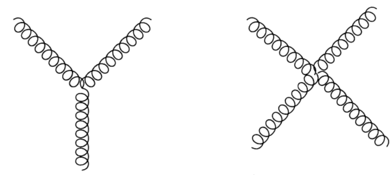
従って $B_\mu(x)$ は，$B_\mu(x) = \sum_a B^a_\mu(x) t_a$，と展開されるから，3つの実数場 $B^a_\mu(x)$ をまとめて表していることになる．$F_{\mu\nu}$ についても同様に展開すると，(16) は次の関係式を表していることが分かる[*8]：

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu + g\epsilon_{abc}B^b_\mu B^c_\nu . \tag{19}$$

準備が整ったので，$\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ を計算しよう．容易に確かめられる公式 $\mathrm{Tr}t_a t_b = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ を用いると（a, b, c に対する和記号も省略して），

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \\ &= \partial^\mu B^{a,\nu}\partial_\mu B^a_\nu - \partial^\mu B^{a,\nu}\partial_\nu B^a_\mu \\ &\quad + 2g\epsilon_{abc}\partial_\mu B^a_\nu B^{b,\mu}B^{c,\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2}g^2\epsilon_{abc}\epsilon_{ade}B^b_\mu B^c_\nu B^{d,\mu}B^{e,\nu}\end{aligned}$$

が得られる．これを4次元時空上で積分したものは「作用」と呼ばれる基本量になっており，ヤン・ミルズ場のダイナミックスを規定する．右辺の1行目は B^a_μ の運動項であり，2行目，3行目は図のような3体および4体の非線形な相互作用を表す．



古典的には作用が極値をとる要請からヤン・ミルズ方程式が得られ，次のような形をとる：

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} = -g\epsilon_{abc}B^{b,\mu}F^c_{\mu\nu} . \tag{20}$$

これはマックスウェルの方程式 (10) に似ているが，大きく異なる点は，上記の自己相互作用のためにヤン・ミルズ場自体がアイソスピンを持ち，(20) の右辺で表されているように，自らの source の役割も果たすことである．もちろん核子や中間子がある場合には，それらが担う source 項を右辺に付け加えて初めて，完全なヤン・ミルズ方程式になる．

2.3 ヤン・ミルズ理論の困難

このようにしてヤン・ミルズ場の理論は誕生したのであるが，それは直ちに注目を浴びることはなかった[*9]．その原因の一つは，そもそもヤン・ミルズ場の励起がどのような粒子として自然界に現れるのかがよく分からない点にある．まず第一に，その質量はいくらなのか．

これについては，後年ヤン自身によって語られた有名な逸話がある．1964年の2月，ヤンはプリンストン高等研究所においてこの新しいゲージ理論についてのセミナーを行った．セミナーが始まるや否や，その頃プリンストンを訪れていたパウリ（W. Pauli）が，「B_μ 場の質量はいくらか」と聞いてきた．ヤンは「よくわからない」と答えたが，パウリはしつこくまた同

*7） ここでも μ, ν に関する和記号 $\sum_{\mu,\nu}$ が省略されていることに注意．また添え字の上げ下げを相対論に従って行っているが，気にする必要はない．

*8） ここで ϵ_{abc} は a, b, c の入れ替えに対して完全反対称で $\epsilon_{123} = 1$ を満たすものを表す記号であり，$[t_a, t_b] = i\sum_c \epsilon_{abc}t_c$ なる関係式から生ずる．

*9） 発表から10年間の間の引用回数はわずかに15件ほどしかない．

じ質問を繰り返した．ヤンは仕方なく，「それは非常に難しい問題で，検討したがはっきりした結論が得られなかった」という趣旨の答えをしたところ，パウリは，「それでは十分な言い訳になっていない」と言ったのである．この物言いに驚いたヤンは椅子に座ってしまい，座は白々とした雰囲気になったのだが，所長のオッペンハイマー（R. Oppenheimer）が取りなしてセミナーを続けさせてくれた，というのである*10)．もちろん，自己相互作用を無視すれば，質量はゼロであると答えるのが自然だが，そのような場は当時（そして現在も）観測されておらず，また相互作用がどう影響するかがわからなかったため，ヤンは正直に答えたものであろう．しかし振り返れば，彼が「難問である」といったのは，まさに正鵠を射たものであった．次節で述べるように，現在我々は，ヤン・ミルズ場が，一方では電磁気相互作用と弱い相互作用を統一的に記述する「電弱統一理論」において，また一方で，ハドロンの振舞いをその構成要素であるクォークやグルーオンの間の相互作用から記述する「量子色力学」において，理論構成の要となっていることを知っているが，そのいずれの場合にも単純に質量がゼロの場としては実現されていないからである．

さらに，当初のねらいであったアイソスピンの概念の局所化というアイデアも，一向にうまくいく兆しがないまま年月は過ぎていった．それに加えてヤン・ミルズ理論にはもうひとつの大きな困難があった．それは，電磁場理論に比して，その正しい量子力学的な取り扱いが格段に難しいことである．1960年代の中葉から，質量がゼロの自由場を基礎として摂動的に徐々に相互作用の効果を取り入れていく方法がファインマン（R.P. Feynman）等によって考察され始め，漸く1967年頃になって明白に相対論的な量子化の方法が確立された．さらに，理論の繰り込み可能性の証明については，1971年のトフーフト（G. 't Hooft）の仕事まで待たねばならなかった．こうしてその誕生からほぼ20年の間，ヤン・ミルズ理論は，方程式は存在しても，その物理的な意味や帰結を取り出すことが非常に困難な理論として，雌伏を余儀なくされていたのであった．

3. 自然法則としてのヤン・ミルズ理論

しかしながら，このよく素性の知れなかったヤン・ミルズ理論が，徐々に自然界の基本理論としてその真の姿を現していくことになるのであるから，歴史はわからぬものである．

3.1 ゲージ対称性の自発的破れと電弱統一理論

この節ではまず電弱統一理論におけるヤン・ミルズ場の台頭について述べよう．弱い力の特徴の一つは，その到達距離が $\sim 10^{-16}$ cm と非常に短いことであるが，この力を交換力と見なそうとすると，交換される粒子は陽子の100倍程の質量を持ち，しかも同時にゲージ場と酷似した性質を持つべきことがわかる．しかし，常識的にはそのような「質量を持ったゲージ場」は存在しない．例えば電磁場に質量を与えるには $m^2 A_\mu A^\mu$（m は質量）という質量項を付加しなければならないが，容易に確かめられるように，この項はゲージ不変ではない．

この常識を覆したのは，アングレール（F. Englert）とブルー（R. Brout），およびヒッグズ（P. Higgs）によって独立に発見されたゲージ対称性の自発的破れのメカニズムであった．「対称性の自発的破れ」の最も基本的な例としては，鉄などの強磁性体を構成している小さな磁石（以下スピンと呼ぶ）が臨界温度以下で同一方向に揃う現象（スピンの凝縮）が挙げられる．特定の方向が選択されることにより回転対称性は破れるように見えるが，実は物理法則自体の対称性は破れてはいない．すなわち，どの方向に揃う場合も系のエネルギーは同じであるから，その意味で回転対称性は存在しており，現実にはそのうちの一つしか実現しないため，あたかも対称性が破れたように見えるのである．そして，重要なことは，南部（Y. Nambu）およびゴールドストーン（J. Goldstone）が指摘したように，その状態からわずかに異なる状態に移るのに要するエネルギーが幾らでも小さくできることから，必ず質量がゼロのスカラー場（NG場）が生ずることである．

アングレール等は，この機構をヤン・ミルズ場と（上記の例におけるスピンに対応する）「ヒッグズ場」が相互作用する系に適用した．そして彼らは，そのとき生ずるNG場がゲージ場に“吸収”されて，結果としてゲージ場に質量が生ずることを発見したのである．この現象自体は電磁気理論でも起こるので，ヒッグズ場として複素数値のスカラー場 ϕ を採って説明しよう．この場の運動を表す項は $(\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi)$（$*$ は複素共役を表す）と書けるが，電磁場が存在する場合 ∂_μ は $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ に置き換わるのであったから，この項は $(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi)$ となる．展開するとすぐ分かる

*10) これにはさらなる後日譚もあるのだが紙面の都合上割愛する．興味のある向きは前掲書2)を見られたい．

ように，これは $e^2|\phi|^2 A_\mu A^\mu$ の形の項を含んでいる．ここで $\phi(x)$ に凝縮が起こったとすると，$\phi(x)$ は位置 x に依らない期待値 v を獲得するから，$e^2|v^2|A_\mu A^\mu$ という形の寄与が生ずるが，これは $e|v|$ を質量 m と解すればまさしくゲージ場の質量項に他ならない．

このようにしてゲージ対称性を本質的に破ることなくゲージ場に質量を付与する「ヒッグズ機構」は，のちにワインバーグ（S. Weinberg）およびサラム（A. Salam）によって電磁気力と弱い力を統一する枠組みに応用され，画期的な成功を納めるに至った．彼らのモデルは群として $SU(2)\times U(1)$ を用いるヤン・ミルズ理論であり，そこには $SU(2)$ ゲージ場 3 個，$U(1)$ ゲージ場 1 個，全部で 4 個のゲージ場が登場する．これにヒッグズ機構を適用することにより，弱い相互作用を媒介する 3 個の重いゲージ場 W^+_μ, W^-_μ, Z_μ（$\pm$ は電荷を表す）と質量を持たない通常の電磁場 A_μ が統一的に得られ，しかもそれらが電子やクォークの場と正しく結合することを示したのである．この理論の実験的証拠は 1970 年代前半から続々と得られ始めたが，1983 年 $W^\pm$ および Z 粒子が加速器によって生成されるに及んで揺るぎないものとなった．

3.2 量子色力学とカラーの閉じこめ

先に述べたように，ヤン・ミルズ場発案の動機であったアイソスピンゲージ場のアイデアはうまくいかなかったが，1960 年代に入ると，後に強い相互作用の基本理論となる「量子色力学」の予兆が現れ始める．まず，加速器の飛躍的発展に伴って強い相互作用をする新粒子が続々と発見されるようになり，1964 年にはこれを説明するために，ゲルマン（M. Gell-Mann）およびツヴァイク（G. Zweig）により，ハドロンを $u, d,$ および s と呼ばれる 3 種類のクォークの複合体と見なす「クォークモデル」が提唱された．さらに，ハン（M.Y. Han）と南部は，3 個の s クォークからなる Ω^- 粒子に関する謎や中性パイ中間子の崩壊確率に関する実験と理論の 3 倍のずれを説明するために，各クォークは 3 種類の「色 = カラー」を持つとする色つきクォーク[*11)]仮説を発表し，ハドロンはすべての色が均等に混じり合った「無色」の状態であるとした．

この仮説では，色つきクォーク間の相互作用の問題は扱われなかったが，1970 年代に入ると，それらが色電荷と結合する $SU(3)$ ヤン・ミルズゲージ場（通称グルーオン場）によって引き起こされるという「量子色力学」(Quantum Chromo-Dynamics=QCD）理論が提案されるに至った．そしてまもなく，この理論は，ヤン・ミルズ場特有の非線形な自己相互作用のために，結合定数がエネルギーが上がるにつれて減少する[*12)]という画期的な性質（「漸近自由性」）を持つことが発見された．そして，この性質のおかげで高エネルギーでの散乱振幅の重要な部分が（小さな）結合定数に関する摂動論で計算できることが明らかにされるやいなや，QCD はたちまちにして強い相互作用の基本理論として注目され，数々の実験事実を説明できることが検証された．しかもこの「漸近自由性」は裏を返せば低エネルギーでは結合定数が増大することを示唆するから，その強い力によりカラー電荷を持ったクォークやグルーオンはハドロン内に閉じこめられ，これらが観測にかからない事実をうまく説明すると考えられるのである．この「カラーの閉じこめ」は，恐らく次のようなメカニズムで起こると考えられている．タイプ II 超伝導体では磁束の拡がりを抑制するマイスナー効果と呼ばれる現象が見られるが，QCD の基底状態はこれに類似しており，クォークから出たカラー電束が細く絞られて一定の張力を持った「ひも」となり，これに縛られて閉じこめが起こるというのである．

こうして QCD の成功は，ヤン・ミルズ理論が，電弱統一理論とはまた別のメカニズムのもとに，強い相互作用の領域においてもその基礎をなしていることを示した．しかしながら，実はヤン・ミルズ理論の全貌はまだ完全に明らかにされたわけではない．とりわけ，近年の弦理論の進展と相俟って，ヤン・ミルズ理論の新たな構造が見えてきており，今更ながらこの理論の奥深さに感嘆させられるのである．

参考文献

1) C.N. Yang and R.L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).

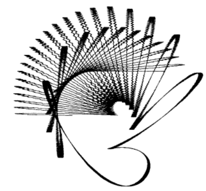
2) L. O'Raifeartaigh, “The Dawning of Gauge Theory”, Princeton University Press, 1997.

（かざま・よういち，東京大学大学院総合文化研究科）

*11） 無論「色」というのは比喩であって，3 種類の異なる量子数を意味する．

*12） 実は観測にかかる「結合定数」は定数ではなく，反応のエネルギーによる．

くり込み群方程式ものがたり



鈴木　増雄

1. はじめに

アメリカのリーマンブラザーズの破錠に始まる世界的経済危機の中で，それを救うリーダーという期待を一身に受けて，アフリカ系のオバマ大統領が誕生した．彼は「米国再生」を掲げ，基礎科学の重視を訴えている．日本にも良い影響のあることを期待する．ところで，**アメリカの大統領選**は，いわば「**くり込み方式**」である．民主党と共和党をそれぞれ支持する代議員（各州の人口に比例して定員が割り振られている）が投票でいったん選出されるが，それらがそのままアメリカの全州で足し合わされるのではなく，各州ごとに，過半数の代議員を獲得した党がその州の定員全部の代議員数を割り当てられる．これは，州ごとの**多数決方式**である．この方式では，人口の多いいくつかの州でわずかでも勝利した党のほうが有利である．各州で両党が接戦であっても，一方の党が大部分の州で他の党よりもわずかずつ多数の代議員を獲得すれば，その党の大統領候補者は圧倒的勝利を納めることになる．

この小文で説明する**相転移・臨界現象**のく**り込み群の理論**[1,2]は，まさに上述した方式と相通ずるものがある[3]．一口に言えば，この理論は**小さなスケール**のゆらぎを先に処理して，より**大きなスケール**のゆらぎにとり込むことを何回もくり返して，最終的に無限に大きなスケールの，すなわちマクロに観測できる物理量（例えば，磁性体の磁化率など）の相転移点近傍での発散などの**異常性**を研究する方針や方法を与える．その一回ごとにとり込む，すなわちくり込む操作の全体を「**くり込み群**」という．（ただし，逆は存在しないので，これは半群である．）強いて言えば，その操作を表す漸化式が「**くり込み群方程式**」である[1]．その変換操作の**固定点**から**相転移点**が求まる．

2. 相転移と自発的対称性の破れ

体系の相転移を記述するハミルトニアンが，秩序パラメータの**ゲージ**（符号など）を変える変換に対して不変になっている対称的な場合には，秩序パラメータのカノニカル平均（熱平均）をとると，それは恒等的に零になってしまう．しかし，実験的には相転移点 T_{c} 以下になると秩序が現れる．すなわち，**対称性が自発的に破れる**．これを理論的に求めるには，いろいろな方法がある．一つは，まずハミルトニアンにその対称性を破る外力 H をつけ加えて，秩序パラメータのカノニカル平均を求めることである．そこで体系を無限大にした後で外力 H を零にする極限をとる．こうすると，相転移点以下では，自発的に対称性の破れた平衡状態が選び出される．もう一つの方法は，まず**局所的秩序パラメータ** $m(\boldsymbol{x})$ と $m(\boldsymbol{y})$ の**相関関数** $C(R) \equiv \langle m(\boldsymbol{x})m(\boldsymbol{y})\rangle$ を求めることである．ただし，R は，それらの距離を表す（$R = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$）．$R \to \infty$ に対するその極限値は，**秩序パラメータ**

のカノニカル平均の平方を与える．すなわち，相転移点以下では

$$\lim_{R\to\infty} C(R) = \langle m(\boldsymbol{x})\rangle\langle m(\boldsymbol{y})\rangle = m_{\rm s}^2 \quad (2.1)$$

となる．しかし，これらの計算を厳密に行うのは多くの場合極めて困難である．

実際は，近似的な計算に頼ることが多い．一番よく用いられる近似法は**平均場理論**である．そのスキームは次の通りである．ある任意の点 $\boldsymbol{x}$ における平均 $\langle m(\boldsymbol{x})\rangle \equiv m$ を，周りの秩序パラメータの平均 $\langle m(\boldsymbol{y})\rangle = m$ の関数で近似的に表す．すなわち，その関係を $m = f(m)$ の形とする[1~3]．ただし，$f(0) = 0$ である．この**非線形方程式**の解の中で，零でない解が相転移点以下で現れる．これが**自発的対称性の破れ**を記述する秩序パラメータの値となる．ここで，$f(m)$ は，ハミルトニアンによって決まる関数であり，通常の相転移では対称性より奇関数となる．それは，m が小さいところでは，$f(m) = am - bm^3 + \cdots (b > 0)$ と展開できる．したがって，$m = f(m)$ の解は，展開の3次までの近似で $m = 0$ および，$m_{\rm s} = \pm((a-1)/b)^{1/2}$ となる．ここで，展開係数 a, b は，温度 T の関数 $a(T), b(T)$ で表され，$b(T) > 0$ である．また，$a(T)$ は T の単調減少関数であり，$a(T) = 1$ の根 $T_{\rm c}$ が相転移点を与える．よって，$T < T_{\rm c}$ では，$m_{\rm s}$ が実数となる．したがって，相転移点 $T_{\rm c}$ 近傍では，$m_{\rm s} \sim (T_{\rm c} - T)^{\beta}; \beta = 1/2$ のような変化（臨界的な振舞い）をする．さらに，相転移点より高い温度では，$m_{\rm s} \equiv 0$ となるが，秩序パラメータに共役な外力 H を少し加えると，それに比例して秩序 m が現れる．その様子を平均場理論で求めるには，先ほどの式 $m = f(m)$ の右辺を（高次は小さいので）m の1次までに限定して，右辺に外力の効果 μH をつけ加えればよい．ただし，μ は温度 T の適当な関数である．すなわち，$m = am + \mu H$ となり，これを m について解くと，$m = [\mu/(1-a)]H \equiv \chi_0(T)H$ となる．したがって，応答を表す（磁化率のような）**応答係数** $\chi_0(T)$ は $\chi_0(T) \sim (T - T_{\rm c})^{-\gamma}; \gamma = 1$ のような**異常性**（**臨界的振舞い**）をこの近似では示すことになる．このような物理量の相転移点近傍での異常性を特徴づける指標 β, γ などを臨界指数と呼ぶ．比熱の異常性を表す臨界指数 α は，平均場理論では零（$\alpha = 0$）となり，これらの指数は**スケーリング関係式** $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ を充たしている[1,2]．

以上の議論を熱力学的ポテンシャル（自由エネルギー）で考えると，自発的対称性の破れがより直観的に理解できる．すなわち，**自由エネルギー**が，相転移点以下では2つの極値を持つ2重井戸型となる．一方の極値をとる状態になることが，自発的対称性の破れとなり，秩序パラメータがその極値の値となる．さらに，秩序パラメータがスカラーでなく，多成分をとるベクトルの場合は，極値は連続的に現れる（回転対称性を持つ）．この場合には，対称性を回復するモード（**南部–ゴールドストーンモード**）が現れる．（因みに，この南部は，2008年度のノーベル物理学賞を受賞した南部陽一郎である．）

これでくり込み群の理論の説明に入る準備ができた．

3. 臨界現象とくり込み群の理論

前節で説明した平均場理論で求めた**臨界指数**の値は実験結果や厳密解の結果とは合わない．例えば，2次元イジング模型では，$\beta = 1/8, \gamma = 7/4, \alpha = 0$（ただし対数的発散）である．これらの違いは，平均場理論では無視されていたゆらぎの効果をとり入れることによって理解されるはずである．このテーマは長い間多くの人によって様々な方法で研究されてきた．厳密解の方法，摂動論的方法（高温展開法），グリーン関数法などが用いられてきたが，それぞれ一長一短がある[1,2]．それに対して，くり込み群の方法は，臨界現象の本質を浮き彫りにする画期的な方法である．このような方法に関する講演を初めて著者が聞いたのは，1970年8月スイスのグスタッドで開催された相転移・臨界現象に関する国際会議のときであった．講演者は，素粒子論に関する南部–ジョナ・ラシニオの論文で有名なジョナ・ラシニオ（Jona-Lasinio）氏であった．

筆者は，彼の話の本質がその場で理解できたわけではないが，その斬新さに魅了されて，彼のいるイタリーのローマ大学に会議の半年後（オランダ滞在後）から1年位滞在して共同研究したいと申し出て彼もそれを受け入れてくれた程であった．(残念ながら，諸事の事情でその計画は実現しなかった．しかし，これが縁となりその後短期のローマ大学訪問は何回もくり返した．) 彼の話は，物性物理の人々には極めてわかりにくいものであったためか，他の参加者は全く評価しなかったと記憶している．

翌年，オランダから帰国後，ウィルソン（K.G. Wilson）の本格的なくり込み群の論文が出たことを知って，さらに驚いた．その第1論文では，カダノフ（L.P. Kadanoff）の**スケール変換**の描像をくり込み群の考え方で現象論的に解説している．第2論文で，3次元模型（イジング模型に "等価な" φ^4–模型）の臨界指数を具体的に求め，磁化率 $\gamma = 1.24\cdots$ と，その当時信じられていた値 $\gamma = 5/4$ に極めて近い値を得た．

さて，第1節で簡単にふれたくり込み群の考え方を一般的に説明する前に，1次元イジング模型を用いて「**くり込む**」ことの意味を解説したい．この系は，次のハミルトニアンで与えられる：

$$\mathscr{H} = -J\sum_{j=1}^{N} S_j S_{j+1} - \mu_{\mathrm{B}} H \sum_{j=1}^{N} S_j. \quad (3.1)$$

ただし，イジングスピン S_j は $S_j = \pm 1$, μ_{B} はボーア磁子，および H は磁場である．図1のように1つおきの格子点上のスピンをボルツマン因子に比例した重みで平均を先にとる．これが×印のスピンの熱ゆらぎをくり込むことになる．今 $H = 0$ の場合を考え，仮りに格子点 j が×印の格子点とする．中間のスピン S_j の熱ゆらぎを通して現れる2つのスピン S_{j-1} と S_{j+1} の相関を与える確率分布 $P(S_{j-1}, S_{j+1})$ を考えると，それは，

$$\begin{aligned} P(S_{j-1}, S_{j+1}) &\propto \cosh\{K(S_{j-1} + S_{j+1})\} \\ &\propto \exp(K' S_{j-1} S_{j+1}) \quad (3.2) \end{aligned}$$

となり，再び**部分ボルツマン因子**の形となる．ただし，K' は次式で与えられる[1)]：

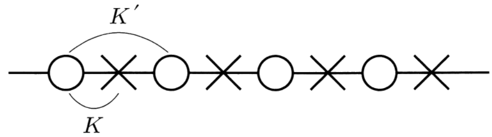


図1 1次元イジング模型でのくり込みの例．1つおきのスピン（×印の格子点のスピン）を消去して "相互作用" $K \equiv \beta J$ が1つおきの "相互作用" K' に変換される様子．

$$K' = \frac{1}{2}\log\cosh(2K). \quad (3.3)$$

こうして，1つおき（スケール $b = 2$）のスピンの部分ボルツマン因子が (3.2) 式のように，新しい**"くり込まれた相互作用"** K' で与えられることがわかる．(3.3) 式がこの1次元系のくり込み群の式である．この変換の固定点は $K' = K = K^*$ とおいて，$K^* = 0$ または $K^* = \infty$ となる．これらはそれぞれ $T^* = \infty$ または $T^* = 0$ に対応する．前者は全く**ランダムな状態**に対応し，後者は，スピンが完全にそろった**秩序状態**に対応する．1次元系は $T > 0$ では**無秩序状態**であるから[1)] $T^* = 0$ のほうが相転移点になっている．このように，一般にくり込み変換の固定点から相転移点が求められる．1次元系ではくり込み変換式が厳密に求められるが，2次元以上では，ほとんど近似的にしか求められない．逆に近似的な取り扱いで満足すれば，容易に**くり込み変換式**が求められるという利点がある[1)]．そのため，くり込み群の理論は爆発的に普及した．上の議論を磁場 H がある場合にも容易に拡張できるが，変換式は $h = \beta\mu_{\mathrm{B}} H$ を用いて $K' = f(K, h)$, $h' = g(K, h)$ のような2変数の少し複雑な式になるので省略する．

以上の議論を一般化すると次のようになる．変換のスケールが，上のように2ではなく，一般に b であるとする．スケール b でハミルトニアン $\mathscr{H}$ をくり込む操作を R_b と書くことにする．この演算子を初めのハミルトニアン $\mathscr{H}_0$ に施すと，$R_b\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_1$ が得られ，これをさらにくり込むと，$R_b\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2, \cdots$ と順次，無限の列が得られる．ここで，$\mathscr{H}_n = R_b^n \mathscr{H}_0$ である．異なるスケール a での変換と組み合わせることもできる．その場

合，明らかに，$R_aR_b = R_{ab}$ である．これは，まさにパラメータ群になっている．くり込み群方程式 $\mathscr{H}^* = R_b\mathscr{H}^*$ で決まる固定点 $\mathscr{H}^*$ から，一般の相転移点が求まる．相転移点近傍の異常性を特徴づける臨界指数を求めるには，**くり込みによる固定点への近づき方**（または離れ方）を調べればよい．**固定点ハミルトニアン** $\mathscr{H}^*$ からのずれを表す（いくつかの）変数を $\{Q_j\}$ とする．そこで，

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}^* + \sum_j h_jQ_j \tag{3.4}$$

とおく．ここで，h_j は Q_j に共役な変数である．一般に，Q_j にくり込み変換 R_b を施すと，$\{Q_i\}$ の非線形の関数になるが，$\{Q_i\}$ は小さいとして線形化し，さらに，全体の変換行列を対角化すると扱い易い．そこで，初めから対角化して $R_bQ_j = b^{\lambda_j}Q_j$ となるように $\{Q_i\}$ を選んで (3.4) 式を書くことにする．固有値を b^{λ_j} の形にとったのは，こうすると，λ_j の正負によって Q_j の物理的振舞いの相違が表されるからである．すなわち，$b > 1$ であるから，$\lambda_j > 0$ ならば $b^{\lambda_j} > 1$ となり，くり込むにつれて Q_j の効果が益々増大される．そこで，このような Q_j は「**有効な演算子**」と呼び，そのような有効な演算子のみを (3.4) 式に入れればよい．逆に，$\lambda_j < 0$ ならば $b^{\lambda_j} < 1$ となり，効かなくなる．これを「**有効でない演算子**」と呼ぶ．

さて，(3.4) 式で記述される（d 次元の）系の単位体積当りの自由エネルギー $F[\mathscr{H}]$ を考える．これはスケール b でみると b^{-d} 倍に小さくなる．固定点近傍のハミルトニアン $\mathscr{H}_0$ に対する自由エネルギー $F[\mathscr{H}_0]$ を変数 $\{h_j\}$ をあらわに書いて $f(\{h_j\}) \equiv F[\mathscr{H}_0]$ とおき，くり込み変換 R_b を施すと，$F[\mathscr{H}_0] = b^{-d}F[R_b\mathscr{H}_0]$ より

$$f(\{h_j\}) = b^{-d}f(\{b^{\lambda_j}h_j\}) \tag{3.5}$$

という**関数方程式**が成り立つ．これより，自由エネルギーのスケーリング形が求められる．特に，Q_1 をエネルギー，Q_2 を秩序パラメータとすれば，$h_1 = t(\propto T - T_c)$, $h_2 = h$（外力）として，Q_2 の熱平均 $Q \equiv \partial f/\partial h$ は $Q(b^yt, b^xh) = b^{d-x}Q(t,h)$ を充たす．ただし，$x = \lambda_2$, $y = \lambda_1$ とおいた．これより，Q は

$$Q = Q(t,h) = t^{(d-x)/y}Q_{\mathrm{sc}}(h/t^{x/y}) \tag{3.6}$$

という**スケーリング形**になる[1]．すなわち，2 変数の**状態方程式**が 1 変数の関数（scaling function）$Q_{\mathrm{sc}}(z)$ で表されることになる．これは強い制限を与えるので，臨界指数は互いに独立でなくなり，**スケーリング則**を充たすことになる．容易にわかるように，

$$\beta = \frac{d-x}{y}, \quad \gamma = \frac{2x-d}{y}, \quad \nu = \frac{1}{y} \tag{3.7}$$

などが導かれる[1]．ここでは，3 番目の式の導出法を説明しておこう．$h = 0$ として t に関するスケーリング則のみを考える．相互作用 K のくり込み変換の式を $K' = f_b(K)$ とする．相転移点は**固定点** $K^* = f_b(K^*)$ で与えられる．この固定点近傍でくり込み変換を線形近似すると，

$$K' - K^* = \Lambda\cdot(K - K^*);$$
$$\Lambda = \left(\frac{d}{dK}f_b(K)\right)_{K=K^*} \equiv b^y \tag{3.8}$$

となる．臨界指数 ν は**相関距離** ξ の異常性 $\xi \sim t^{-\nu} \sim (K-K^*)^{-\nu}$ を特徴づける．（ただし，ここでは $t = K - K^*$ である．）スケール b で**粗視化**した系の相関距離 ξ' は $\xi' = \xi/b$ となる．これより，(3.8) 式を用いて整理すると，$\Lambda^\nu = b$ が得られ，$\nu = \log b/\log\Lambda$ という**ウィルソンの公式**が導かれる．よって，$\Lambda = b^y$ より，$\nu = 1/y$ となる．この変換の様子は図 2 に示されている．他の指数についても同様である．

4. くり込みの普遍性と理論の相似性

第 3 節までに，マクロな物質の相転移・臨界現象の理論について説明してきたが，南部陽一郎は相転移を特徴づける対称性の破れは非常に**普遍的**な概念であり，**素粒子の質量出現のメカニズム**の理論でも本質的な役割を果たすことを発見した．

一方，朝永とシュウィンガーは，素粒子の質量などを場の理論で計算する際に現れる**発散の困**

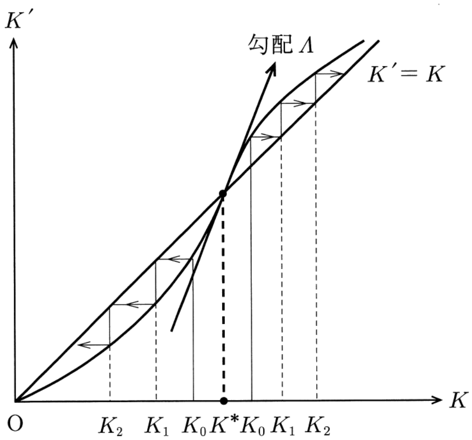


図2　くり込み変換 $K' = f_b\ (K)$ の模式図.
$K^* = f_b\ (K^*)$ は固定点.

難を解消する方法を独立に発見した．それがくり込みの処法である．ウィルソンは，その概念，特にくり込み群の考え方が，マクロな物質の相転移に伴う臨界現象を理論的に扱う強力な方法を提供することを見抜いた．これらの理論の基本になっている数理的構造は，出発点となる波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ や相関関数 $C(\boldsymbol{r})$ が同型の微分方程式に従うことである[2]．この方程式の解は，よく知られているように，$\exp(-\kappa R)/R$ の形（**湯川型またはオルン・シュタイン–ゼルニケ型**）で表される．また，方程式自体は，統計力学的には，イジング模型に対するいわゆる**キャレン–鈴木の相関等式** $\langle S_{\boldsymbol{j}} S_{\boldsymbol{j+r}} \rangle = \langle \tanh(\beta \sum_{\boldsymbol{i}} J_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j+r}} S_{\boldsymbol{i}} S_{\boldsymbol{j}}) \rangle$ を，$R = |\boldsymbol{r}|$ が大きい極限で線形近似することによって容易に導出される[1,2]．これらの**相関等式**は，**自由度の部分消去**（くり込み！）によって1960年代に一般的に得られた[1,2]ことは，大変感慨深いものがある．有限の R に対する一般的な相関等式は，**スケール不変**ではないが，相転移点に近づくと漸近的に（$R \to \infty$ で）その不変性を回復する．

5. おわりに——くり込み群にまつわる思い出

第3節で述べたスイスでの会議の後，オランダのユトレヒトに同大学理論研究所の客員教授として半年間滞在し，週一回統計物理学の講義を行った．その間に，当時院生だったトフート（G. t'Hoot）が指導教授のフェルトマン（M. Veltman）と黒板に多重積分を書いて議論しているのをよく見かけた．日本に帰国後間もなく，その院生が**非可換ゲージ理論**のくり込み**可能性**を証明し「**標準模型**」の基礎づけを行ったと素粒子研究者の間で大評判になっていることを知って感動した．（1999年彼らはノーベル賞を受賞した．）

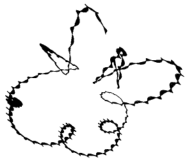
1973年5月には，ペンシルベニアのテンプル大学で，臨界現象のくり込み群の理論の国際会議が開催され，筆者も招待され文部省の国際研究集会派遣旅費で参加した．主役の小柄なウィルソンの講演は身振りまでも大変躍動的であったことが今でも目に焼き付いている．この会では他にも大きな話題となる前刷が出回っていた．それは，素粒子の強い相互作用の理論である**ヤン–ミルズ・ゲージ理論の漸近自由性**をくり込みの処方で証明したグロス（D. Gross）とウィルチェック（F. Wilczek）の論文であった．この前刷を日本に持ち帰って早速東大の素粒子研ゼミで紹介した思い出がある．彼らは，ポリツアー（D. Politzer）と共に2004年にノーベル賞を受賞した．因みに，南部と共にノーベル賞を受賞した小林誠と益川敏英の**基本粒子の模型**と**CP対称性の破れ**に関する理論が提唱されたのもこの年であった．このように70年代の前半は対称性の破れとくり込み群に関する画期的な発展の時代だった．この頃は筆者にとっても上記の刺激と恩師久保亮五先生の居られた東大物理教室に物性研から移ったことと相俟って研究活動の最も盛んな時期であったと懐しく思い出される．

参考文献

1) 鈴木増雄，現代物理学叢書『統計力学』（岩波書店，2000年）.
2) 鈴木増雄，「数理科学」No.541，2008年7月号42頁.
3) 鈴木増雄，『活力を与える「物理」』オーム社，2007年.

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

ファンデルワールス方程式
相転移理論の源流



小貫　明

理想気体においては圧力 p は密度 n と温度 T に比例しており状態方程式は $p = nk_BT$ で与えられる（ボイル–シャルルの法則）．$k_B = 1.38 \times 10^{-16}\mathrm{erg/K}$ はボルツマン定数と呼ばれる．気体分子運動論ではこの関係は速度 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ に対して次のマクスウェル（Maxwell）の速度分布則から導かれる．

$$f(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \exp\left[-m\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2k_BT}\right]. \quad (1)$$

m は分子質量である．$m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2$ は一粒子の運動エネルギーであり，その平均は $3k_BT/2$ となる．しかし密度 n を増やしていくと粒子間相互作用が顕在化する．即ち分子に侵入不可の硬い部分（ハードコア）があることと分子間引力があることが肝要である．アルゴンのような一成分流体に対し，ファンデルワールス（van der Waals）の状態方程式は圧力 p を密度 n と温度 T を用いて次のように書ける（1873）[1,2]．

$$p = \frac{nk_BT}{1 - v_0n} - \epsilon v_0 n^2. \quad (2)$$

v_0 は分子毎のハードコアの体積を，ϵ は粒子対の引力ポテンシャルの大きさを表す．第一項は分子当たりの平均体積 $v = n^{-1}$ を用いて $k_BT/(v - v_0)$ とも書け，$v - v_0$ は一粒子当たりの排除体積を除いた有効体積と解釈できる．第二項は粒子間引力のため圧力が減少することに起因する．この方程式から臨界点が条件 $(\partial p/\partial v)_T = (\partial^2 p/\partial v^2)_T = 0$ から決まる．簡単な計算により臨界温度 T_c，臨界圧力 p_c，臨界密度 n_c は次のようになる．

$$T_c = 8\epsilon/27k_B, \quad p_c = \epsilon/27v_0, \quad n_c = 1/3v_0. \quad (3)$$

図 1 に T を固定した p-v 曲線を描く．p は v の関数として $T > T_c$ では曲線は単調減少であり，$T = T_c$ では臨界体積 n_c^{-1} で傾きが零になり，$T < T_c$ では極小点と極大点が現れる．ここで $K_T = (\partial n/\partial p)_T/n = -(\partial v/\partial p)_T/v$ を等温圧縮率と言う．この量は臨界点で発散することが分かる．$T > T_c$ では気体と液体の区別がなく連続的に移り変わるが，$T < T_c$ ではファンデルワールスの等温曲線は極小と極大を持つ．2 年後の 1875 年にマクスウェルは図にある 2 つの部分 A と B の面積が等しいという条件で気体・液体の共存状態が実現されることを示した．A と B を分ける等圧線の両端が液体・気体の体積を与える．この規則は二相の化学ポテンシャルが等しいという条件から導出できる．化学ポテンシャルはギッブス（Gibbs）（1839–1903）により 1873–1879 年に導入されたのでマクスウェル

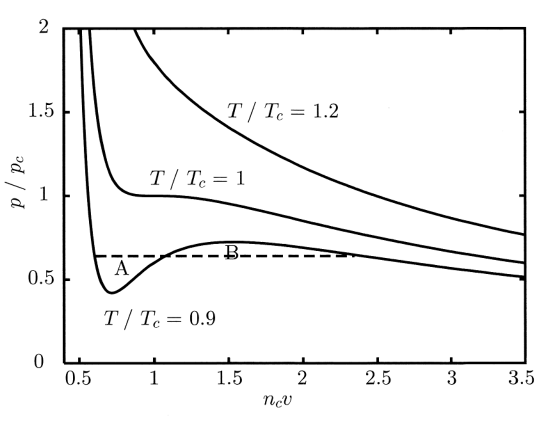


図 1　$T/T_c = 1.2,\ 1,\ 0.9$ に対応するファンデルワールス等温曲線．横軸は平均体積 $v = 1/n$ に臨界密度 n_c を掛ける．縦軸は圧力を臨界圧力 p_c で割る．A と B の面積は等しい．

(1831–1879) はファンデルワールスより早くその論文を見たと思われる．しかしファンデルワールスはギッブスの理論をすぐに理解した．また (3) 式の臨界値の間に $p_c/n_ck_BT_c = 3/8 \cong 0.375$ が成り立ち普遍関係式のように見えたが，これは過大評価された近似値であった．実際 p_c/n_cT_c の実験値は Ar, H_2O に対して 0.29, 0.23 である．この不一致にがっかりしたとファンデルワールスが 1910 年ノーベル賞講演で述べているそうである．現代的視点では近似が大胆でこれだけ合えば凄い．

熱力学においてはヘルムホルツ自由エネルギー F が与えられると平衡状態の完全な記述ができる．当時のファンデルワールスらはギッブスの影響を受けこの F を "Gibbs's ψ-function" と呼んでいた[1]．ファンデルワールス理論における F を全体積 V で割ると次のように書ける．

$$\frac{F}{V} = k_BTn\ln\left[\frac{nC_0/T^{3/2}}{1-v_0n}\right] - k_BTn - \epsilon v_0n^2. \quad (4)$$

ここで v_0 と ϵ を零に置くと理想気体の自由エネルギーが得られる．C_0 は古典力学では決まらない定数であり，その後の量子力学によるとプランク定数 $\hbar$ を使って

$$C_0/T^{3/2} = \lambda^3 = \hbar^3(2\pi/mk_BT)^{3/2} \quad (5)$$

という形に書ける．λ をドブロイ長と言う．F を温度 T，体積 V，粒子数 N の関数と考えると熱力学公式

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN \quad (6)$$

が得られる．ここで S はエントロピー，μ は化学ポテンシャルと呼ばれる量である．実際に N と T を固定して関係式 $p = -\partial F/\partial V = V^{-1}n\partial F/\partial n$ からファンデルワールス状態方程式 (2) が容易に得られる．一粒子当たりのエントロピーは次のようになる．

$$S/Nk_B = -\ln(n\lambda^3) + \ln(1-v_0n) + 5/2. \quad (7)$$

従い等体積比熱は $C_V = T(\partial S/\partial T)_V = 3k_BN/2$ となる．等圧比熱 $C_p = T(\partial S/\partial T)_p$ の計算も大学での演習問題である．

次に多成分流体を考える．コップの水の中には窒素や酸素が混入しており混合気体 = 空気と接している．多成分希薄気体については，$n = \sum_i n_i$ を全粒子種の密度として圧力はやはり $p = k_BTn$ で与えられる（ダルトンの法則）．以下添え字 i, j は粒子の種類を表し n_i は i 種の粒子の密度である．ファンデルワールスは高密度でも使える多成分流体の状態方程式を次のように提出した（1890）[1,2]．

$$p = nk_BT/(1-\phi) - \sum_{ij} w_{ij}n_in_j. \quad (8)$$

ここで v_{0i} を i 粒子のハードコア体積として $\phi = \sum_i v_{0i}n_i$ は排除体積分率を意味し，第二項では w_{ij} は ij 対の引力を表すパラメーターである．対応する多成分系のヘルムホルツ自由エネルギー F を体積 V で割ると次のようになる．

$$\frac{F}{V} = k_BT\sum_i n_i\ln\left[\frac{n_i\lambda_i^3}{1-\phi}\right] - k_BTn - \sum_{ij} w_{ij}n_in_j. \quad (9)$$

ここで $\lambda_i = \hbar(2\pi/m_ik_BT)^{1/2}$ は i 種粒子のドブロイ長．(8) 式の圧力は $p = -\partial F/\partial V$ から導かれる（ここで T と粒子数 $N_i = Vn_i$ は固定）．この理論から得られる 2 成分流体の相転移現象は極めて複雑であり，コルトヴェグ（Korteweg）（1848–1941）により計算機のない時代に解析的に調べられた．相分離においては，密度差が大きい気液分離と密度差があまりなく組成 $X = n_2/(n_1+n_2)$ の差が大きい液液分離がある．また気体・液体 1・液体 2 の 3 相共存も可能である．3 成分・4 成分系となるとますます複雑な相挙動になる．これらの様相は現代になりスコット（Scott）やグリフィス（Griffiths）により調べられた．この意味でコルトヴェグは臨界現象研究のパイオニアである．彼はコルトヴェグ–デブリス（Korteweg-de Vries）方程式（最初のソリトン理論）の提出でも名高い．

ファンデルワールスにはもう一つの先駆的業績がある．彼は液体･気体界面の理論を 1893 年に提出した[3]．密度 $n = n(z)$ が高さ z とともに変化する場合に，自由エネルギー密度に密度勾配の二乗 $|dn/dz|^2$ に比例する項を加え，界面での密度変化および界面張力を計算した[3]．即ち (4) 式右辺の自由エネルギー密度を $f(n, T)$ と書いて全体の自由エネルギーを次のように書く．

$$F = \int dz\left[f(n,T) + k\left|\frac{dn}{dz}\right|^2\right]. \quad (10)$$

k は定数である．一般化された化学ポテンシャルは汎関数微分 $\mu = \delta F/\delta n$ で定義できて平衡では一様になる．$T < T_c$ の気液共存では $\mu_{\rm cx}(T)$ を共存状態での化学ポテンシャルとして次の微分方程式を得る．

$$\frac{\partial f}{\partial n} - 2k\frac{d^2 n}{dz^2} = \mu_{\rm cx}(T). \qquad (11)$$

この方程式の境界条件として，$z \to \infty$ で $n \to n_g$，$z \to -\infty$ で $n \to n_l$ とする．ただし $n_g = 1/v_g$ と $n_l = 1/v_l$ は図 1 で決まる共存する気体と液体の密度である．上式の両辺に dn/dz を掛けると z で積分できて

$$f(n,T) - \mu_{\rm cx}(T)n - k\left|\frac{dn}{dz}\right|^2 = -p_{\rm cx}(T). \quad (12)$$

$z \to \pm\infty$ での熱力学関係から $p_{\rm cx}(T)$ はマクスウェルの規則で決まる共存状態での圧力であることが分かる．さらに界面張力 γ は界面での余分な自由エネルギーであって次の表式で与えられる．

$$\gamma = 2\int dz[f(n,T) - \mu_{\rm cx}(T)n + p_{\rm cx}(T)]. \quad (13)$$

上式の被積分関数は z が界面から離れると急激に零になる．ファンデルワールスは臨界点より僅かに低温で $\gamma \propto (T_c - T)^{3/2}$ となる現代ではよく知られた平均場近似の関係を得た．慧眼なる読者は，お分かりと思うが，ファンデルワールスの界面の理論は勾配 (gradient) 項を含むギンズブルグ–ランダウ（Ginzburg–Landau）理論の初めての例であった．当時ギッブスは界面張力について大著を書いたがマクロな現象論であった．50 年以上の年月のあとで，勾配項はギンズブルグ–ランダウの第一種超伝導の論文（1950）[4]，カーン–ヒリヤード（Cahn–Hilliard）の界面の論文（1958）[5]で導入された．各々その後の超伝導理論・相分離理論に決定的影響を与えたのであった．

ファンデルワールス（1837–1923）の生涯を紹介する．彼はオランダのライデンで大工の 10 人の子供の長男として生まれ独学で中学校の先生になった．25 歳になってライデン大学の聴講生となり，先生を続けながら 1870 年（33 歳）に博士課程院生となった．"On the Continuity of the Liquid and Gaseous States" と題する博士論文を提出したのは 1873 年であった．これは相転移の初めての理論でありマクスウェルにより 1874 年に *Nature* 誌において激賞された．ファンデルワールスの名声がここに確立し，彼は 1876 年に新設されたアムステルダム大学の教授に 39 歳で任命された．彼の周りには所謂オランダ学派が形成され，コルトヴェグ（1848–1941）や 1908 年にヘリウムの液化に成功し 1913 年にノーベル賞を受けたカメリング・オンネス（Kamerlingh Onnes）（1853–1926）が有名である．

最後に気液転移の非平衡状態について述べる．コップの水は蒸発しつつあり水蒸気と空気中の多種の気体がどの様に界面近くで分布しているかは実は難問である．水温や空気圧に依存しているし風が吹くかもしれない．また空中にいかに雨や霧ができるのか？ 冷蔵庫・エアコンではヒートポンプと呼ばれる装置が作動しており，気液転移を利用している．そもそもオンネスらの液化実験は熱的不安定性に起因する非平衡現象である．ファンデルワールス本人にはダイナミクスの研究はないが，コルトヴェグは，混合流体で組成に空間勾配があると流体中にストレスが発生すると考えた（1901）．同じ考えは臨界点近くでの輸送係数の異常性の理論に時を経て再出した．これらダイナミクス研究については著者の最近の解説を見られたい[6]．

参考文献

1) J.L. Sengers: *How fluids unmix: Discoveries by the school of Van der Waals and Kamerlingh Onnes*; *Physics Today* **55** (2002) 47. Korteweg の紹介．
2) http://www.knaw.nl/waals/ (Van der Waals and the Dutch school). ここで文献 1) の本がダウンロードができる．
3) J.D. van der Waals: *Verhandel. Konink. Acad. Weten. Amsterdam* (Sect. 1), Vol.1, No.8 (1893), 56 pp. 英語訳：J.S. Rowlinson: *J. Stat. Phys.* **20** (1979) 197.
4) V.L. Ginzburg and L.D. Landau: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20** (1950) 1064. これに Abrikosov の理論が続いた．
5) J.W. Cahn and J.E. Hilliard: *J. Chem. Phys.* **28** (1958) 258; J.W. Cahn, *Acta Metall.* **9**, 795 (1961).
6) 小貫明：日本物理学会誌 **63** (2008) 779（10 月号）．

（おぬき・あきら，京都大学大学院理学研究科）

物理学の発展をより深く理解するために

和達　三樹（聞き手：編集部）

1. 現象と概念と方程式—特集テーマについて

——今回のメインテーマである，現象と物理概念と方程式をうまくつなぎ合わせながら，統一的にかつ本質をつかんで物理を理解するにはどのようなポイントがあるのか．要となる見方や考え方をご教示いただけますでしょうか．

まず，現象，概念，方程式をそれぞれ正確に理解することが必要ですね．そして，それらの全体像を眺めてみます．この２つの思考過程が決して一方向でないことを知ることが最大のポイントです．現象・概念から方程式へ，逆に方程式から現象・概念へと，行きつ戻りつすることにより，より深い理解と更なる発展が可能になります．このことは個人レベルのことだけでなく，各分野の歴史的な発展においても同様でしょう．また，２つの思考過程のバランスがとれていないと，大変筋の悪い研究者・技術者となってしまいます．個々の現象・概念には詳しくても全体の位置づけができなかったり，全体としてはわかっているつもりでも，個々の現象・概念の理解ができていないと信頼し得る成果に達することは不可能です．この注意は自分の授業でも，学生が具体的に納得できるように強調しているつもりです．



和達三樹氏．

学生をみていてよくわかることは，方程式の細部に気をとられてしまっていたり，全体として何が面白いのか，次の発展は何かといったことに興味がない，という人が多く見られます．既に習った他の分野との比較も必要な視点となります．そうした背景を考えると，今話した２つのバランス，すなわち，細部の理解と全体の把握，が大切だと思います．これは学問だけでなく普通の仕事でも同じですよね．英語で言うと，スマート（利口な）であるとともに，ワイズ（賢明な）になってほしいということです．

2. 物理学と方程式の関係性—歴史上での役割

——物理学の歴史において量子力学や一般相対性理論が発展したときには，それを象徴する方程式が付随して現れていますが，そう考えますと，何

か方程式のようなものが出ないと物理の発展とは言えないでしょうか.

そうですね．物理学の新しい発展には，それを象徴する方程式が付随して現れることは確かです．それを記述・解析するための新しい数学が必要になることも歴史的には多くの例があります．しかし，物理学にはいろいろな発展段階があり，また適応条件によっては基礎方程式にまで遡らなくても正しい理解ができる場合が多くあります．それと，新しい発展の端緒が，実験的であることが多いことも忘れてはいけません．計算機の急速な発展も考慮すべきでしょう．理論と実験，物理と数学の絶妙な組合せの上に現代物理学が成り立っているとも言えます．先端物理学を同時進行形で見ていると正解が何であるかは，なかなかわかりません．いつの日か天才が現れて「これが皆さんに必要な方程式ですよ」という筋書きが一番わかりやすいのですが….

物理学の発展を議論する場合，よく例に出されるのが，電磁気におけるファラデーとマクスウェルの比較です．ファラデーは実験を通して電場・磁場の概念を導入し，時間変化する場合には磁場と電場が独立でないことを見抜きました．一方，マクスウェルは理論的に変位電流を導入しながら，電磁気現象が4つの方程式にまとめられることを見出しました．どちらが偉いかという質問はやや狭い見方です．ともに物理学の大きな発展を生み出しました．手法は異なるものの，自然に対する極めて深い洞察を行っていると思います．

3. 美しい方程式とは——何がそう見せるのか

——ディラックやアインシュタインといった物理学の先達は，方程式や理論の“美しさ”ということへのこだわりがあったようですが，方程式の何が美しさを表現するのでしょうか.

アインシュタインは「神は老獪だが悪意はない」と言いましたが，その根底には，自然は簡潔な方程式で記述されるはずである，という信念があると思います．ディラックはさらに明確に，「物理法則は数学的な美を有していなければならない」と言いました．確かに，あまり複雑な方程式は基礎方程式とは言えないでしょう．見方を少し変えると，物理学では，各論的に必要な2次的効果は無視して，“理想”的な系を導入する結果が美しさにつながっているのだと思います．それが，ガリレオやニュートンに始まる近代物理学の成功の秘訣でもありました．慣性系や質点などの理想化なしには，ニュートン方程式はあまり美しくはありません．理想化によって方程式は簡潔な形となり，現象や概念の普遍性・一般性が明らかになることが，方程式の美しさだと思います．力学の最初から，ニュートン方程式を摩擦のある場合で書いたり，特殊な座標系で書いたりするよりも，$ma = F$ と簡潔な形でその本質を書けるからこそ美しいのだということです．

4. 教育現場では——問題点など

——実際の教育現場の中で，今回の特集テーマに関するような質問は学生から挙がりますか．もしくは，そうしたことへの理解の不十分さから来る弊害などがありましたら，授業での反応なども含めてお聞かせいただけますでしょうか.

授業においては，もう少し積極的に質問をしてほしいと感じますね．質問がないということは，すべてわかったか，全くわからないのかどちらかですよ，と言っても反応がないことがあるんですね．やはり質問がないと学生諸氏の理解度をチェックすることは難しいです．また，質問をすることは学生の特権と考えてほしいですね．社会に出ると，他の人たちの反応は，そう甘くはないのが現実です．ただ，この点については，教師のほうにも責任があるかもしれません．盛りだくさんの式を書き並べるだけではなく，歴史・動機・発展・問題点にも時間を割いて少し立ち止まることも必要で

しょう．

米国に留学していたとき，統計力学で有名なオンサガー（L.Onsager）と話す機会がありました．彼は，授業をすることはセルフエデュケーション（自己教育）である，と言っていました．私はそれに加えて，学生諸氏が疑問に感じた点は時として重要な発展の端緒であるとも考えています．専門家となると“常識”が身につきすぎる傾向が出てきます．少し状況は異なりますが，粒子速度がなぜ光速度以下でなければならないか，という高校教師の質問がタキオン（tacyon）の導入の発端であったと，ロチェスター大学のスダーシャン（E.C.G. Sudarshan）が言っていました．

また，「何に役立つのですか」という質問も時々あって，これは純理論系の先生には大変評判が悪いようです．実は，それを不快に感じる教師のほうが準備不足と思うのですが．他にも「数学では，よく用いられる3次元ではなく，なぜ n 次元のベクトル空間を学ばなければならないのですか」といった質問があったり，いろいろなレベルでの質問があります．いずれにしても，そうした質問に対する簡潔な説明やちょっとしたヒントは，授業のスパイスになると思います．

こうしたことを考えると，よくテレビ番組にある「世界一受けたい授業」というのは，全部がスパイスになってしまうので，将来に向けての栄養にならないと思いますね．スパイスだけの食事がないように，授業においても同様で，そうしたことへの時間的割合やタイミングが大事です．

5. 影響を受けたこと

――先生が研究者になるにあたって，個人的に影響を受けたこと（数式，概念，人物など），もしくは今回のテーマに合わせて，好きな（美しいと思う）方程式などがありましたら，お教えいただけますでしょうか．

はじめに人物と研究者について話しましょう．私は，自然とともに人間が大好きです．そして，研究者の伝記を読むのが大変好きです．それを通して，研究者を取り巻く時代の様子や環境を理解し，また個人的な苦悩や喜びを伺い知ることができるからです．伝記は人生の応援歌とも感じられます．新しい発展はちょうど適した時代に生れることは確かですが，最後は研究者個人の献身・努力に帰せられることが多いと思います．

人物としては，アインシュタイン，フォン・ノイマン，フェルミ，ファインマン，ファラデー，ランダウ，そして物理学者ではありませんがパスツールに興味をひかれました．いずれも愛すべき個性をもち，優れた業績をあげました．特にファラデー（1791–1867）は好きな研究者です．彼は本屋の店員から超一流の学者になる「努力の人」ですが，40才代後半には既に記憶力の喪失に悩まされ始めます．それでもなお，人生75年で膨大な業績をあげるのですから信じられないようなことです．

次に，数式や概念についてですが，今回の特集に登場する方程式はすべて美しいと感じています．極限にまで無駄を省きながら，自然の本質を記述できていることに感動します．私自身の専門分野に近いところで言えば，残念ながら今回の特集には直接的には登場しませんが，ギブスによる平衡状態の統計力学の定式化は実に美しく大きな業績だと思います．

今話したように，業績と同時に人間性というものには大変興味が出ますよね．最近では，学生はあまり偉人伝（この言葉は既に死語でしょうか）を読んでいない傾向もあるようです．また，そういう機会がなくなってきているのも教育の手法・目標としてちょっと欠けているのでは，と思います．歴史の裏側をうるさく言えばもっといろいろな事情はあるでしょう．真の発見者，創始者は誰か，ということも，時として自明ではありません．そういったこともあって，人間性をあまり強調しすぎないように，偉人伝を読む機会が減ってきたのか

もしれませんが…．自由闊達に生きたと思われているファインマンも，結果から言えば3回結婚しましたが，最初の奥さんは不治の病であったことを承知で結婚したわけです．そういった苦悩というのは，物理を勉強するために直接必要ではありませんが，今の学生があまり知らないのもちょっと問題ではないかとも感じます．

また，昨年のノーベル物理学賞をみて思いますが，日本に特に学問を大切にする文化的風土があるということは大変貴重だと思いますね．以前の話ですが，日本に来たいという留学生の大半は，経済か電子工学を学びたいというのが理由だったようです．一方で，明治時代の日本人をみて偉いなと思うのは，哲学や数学，物理など，必ずしも実学ではない学問なのに，わざわざ留学して海外から学んできているんですね．それがもたらした事というのは大変貴重で，後世の私たちにも多大な影響を与えていると思います．

6. 伝えたいメッセージ

——最後に，学生や後進の人たちに，伝えたいメッセージをお願い致します．

物理や数学を習得するのが難しいのは確かです．物理の勉強は健康に悪い，という冗談もあります．しかし，困難さばかりに注意をはらうのではなく，心の余裕をもって楽しみながら勉強してほしいと思っています．山登りで経験するように，登り路の苦しさを通過して尾根や頂上に出るならば，視野が広がり美しい風景が見えてくるのです．論語には，「これを知る者はこれを好む者に如かず．これを好む者はこれを楽しむ者に如かず」とあります．単に知るよりは好きなほうがよい，ただ好きであるよりはそれを楽しめるほうがもっとよい，という意味です．

先ほど伝記について触れましたが，各個人の興味や教育的背景，理解の仕方や速度は異なります．人と比べる必要はありません．自分自身を失うことなく，理解を深めていく方法を各自で探って下さい．現在は情報があふれています．その中で，一流のものを見出す審美眼を養う工夫をしてほしいと思います．古美術商の修業は，本物だけを集中して見ることだそうです．物理・数学においても，一流の論文や本を時間をかけて読むということが必要だと思います．

情報が氾濫していることの弊害として，最近では学生がWikipediaでレポートが書けてしまうという種類の問題が多くて困っています．そういったことをなくすためにも，何が一流で本物かを見極める審美眼を養うことが本当に大切です．そういう機会が少ないのも問題ではあるのですが…．短小軽薄の傾向と言いますか，本でもキーポイントものばかりが多く，三千円以上の本をほとんど買わない学生が増えてきたことも事実です．一流のものや名著にゆっくり触れていく余裕がなくなってきている時代背景もあるでしょう．私が大学生の頃は，すぐには分からなくても，名著を買い眺めるのが一つの幸せであったのですが．テレビでノーベル物理学賞の報道を見ても，もう少しマスコミ側が科学報道の内容や伝え方に工夫をしてほしいと感じますね．最近の報道に対しては，科学技術立国と言われているわりには，ずいぶんお粗末な印象を受けます．

日本で育まれた基礎科学の文化的風土を本当に大切にしていきたいものです．

——本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2008年11月，
東京理科大学神楽坂キャンパス研究室にて）

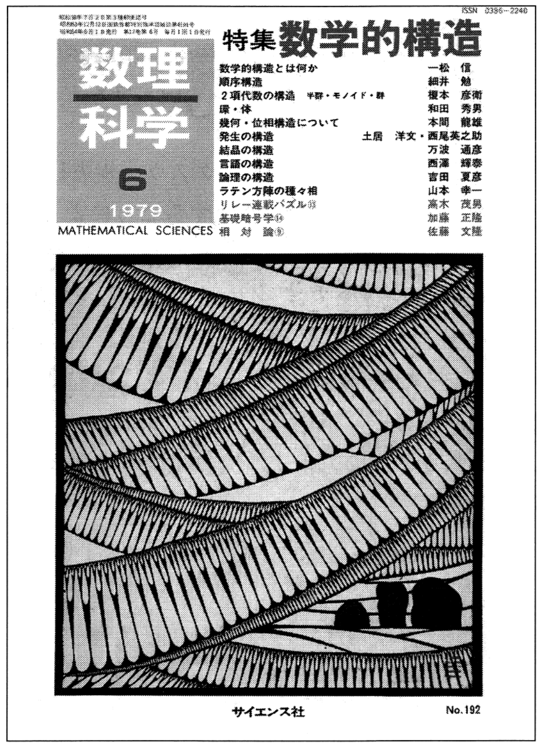
（わだち・みき，東京理科大学理学部）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

細井　勉

1979年6月号



30年前というと，日本にパソコンが登場し，インタプリタ・ベーシックを使って簡単な計算が手軽にできるようになった頃でした．紙テープやカードも使わず，モニターを見ながらプログラムやデータを打ち込むようになりました．結果もモニター上にすぐに見えるようになりました．もっとも，研究に使うのには，プログラムの工夫が必要でした．価格も数学の研究費にとってたいへん高価でしたが，身近に置けることは魅力でした．これは，数学者の視点からの回想です．

その頃，電話回線でデータ通信が可能になりました．データは音声として伝達していました．その速さは毎秒300ビット程度でしたから，時間がかかりました．文字化けに悩まされました．誤りの処理やデータ圧縮で，符号理論の具体例が使われるようになりました．暗号化も問題になりはじめていたようです．

大学でコンピュータ関係の学科が「情報」という看板の下で再編されたり新設されたりしたのもその頃のことでした．そこでは「構造」の概念が重要だと認識されていましたが，それを教えられる人はあまりいませんでした．

そういうことで，符号理論と関係させて有限体論を教え始めたのもその頃です．情報教育の中の数学教育は解析学者の独擅場だったのが，ここに代数学者の場が出てきたのです．幾何学者の出番はもうすこし後になってのことでした．

順序や有限体とかの構造が応用上いろいろと有用なのだと示そうとするこの特集は，こんな時代背景のものでした．数学とは縁の薄い分野にも構造を見ていました．抽象的な数学理論の具体例が活躍しはじめたのは嬉しいことでした．私自身は，この中で5次元キューブを図で表すことを楽しみました．

今では，パソコンは数学者にとって必需品です．この特集は，そして本誌は，多くの数学者がコンピュータを敬遠していた時代に，数学者に，研究・教育の新しい場を示そうとしたものでした．数学者とコンピュータの間のギャップを埋めようとしたものだと思います．

ついでに言うと，中等教育でコンピュータを教えようと言われ始めたのは，この後20年以上も経ってのことでした．コンピュータが安くなってきたことやワープロとして使われ始めたことも関係していたようです．

30年前の大学でのコンピュータ教育は，今考えると，まったく基本的な，幼稚なことから教えたものです．現在では，そういう知識が，主として携帯電話体験によって，大学に入ってくるずっと以前に身についていることにびっくりします．技術の習得は，習うより慣れろ，ということでした．でも，抽象理論を仕込むのは，相変わらず，そんなに簡単ではないようです．

（ほそい・つとむ）

問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 第5回

マクスウェル方程式の微分形と積分形

香取 眞理・中野 徹

これから2回にわたってマクスウェル方程式にベクトル解析の手法[1,2]を適用することにより，電磁気の問題を解く．マクスウェル方程式は**局所的な表現**である**微分形**で書かれているが，その直感的な理解は**大域的な表現**である**積分形**を通じて得られることを強調したい．今回は主に静電場に関連した問題を取り上げる．

マクスウェルの方程式は次の4つの方程式で記述される：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad (5.2)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \quad (5.4)$$

ここで $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{J}$ は電場，磁場，電流密度であり，すべてベクトルである．ρ は単位体積あたりの電荷（電荷密度）である．ε_0 は真空の誘電率と呼ばれ，

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.0 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$$

である．$\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$ は真空の透磁率である．

5.1 電荷の保存

物理では様々な保存則が現れる．質量保存則，電荷保存則などである．ある領域をとって，その中の物理量が時間的に変化すれば，その物理量が流入したか，流出したかである．（運動量保存則では外部の力による運動量の増減を付け加えないといけない．）

ある体積 V の中の電荷が増加すれば，その表面 S を通じて電流の形で流れ込んだためである，というのが**電荷の保存則**である．そのためには体積 V の中の電荷量を計算する**体積積分**，表面 S を通じて電流の形でどれだけ電荷が流れ込んだかを計算する**表面積分**が必要となる．ベクトル解析では種々の積分をよく理解することが不可欠である．積分は難しくない．積分を，**[ステップ1]** 微小要素を定義し，**[ステップ2]** その微小要素の寄与を計算し，**[ステップ3]** それらの和をとる，の3段階に分解すれば難しいことは何もない．

それではまず電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ による，体積 V の中の総電荷 Q を計算しよう．[ステップ1] は，図5.1のように点 $\boldsymbol{x}$ の周りに微小体積 $dV = dxdydz$ をとることである．[ステップ2] は dV に含まれる電荷の大きさ dQ を表すことである．点 $\boldsymbol{x}$ での電荷密度を $\rho(\boldsymbol{x})$ としているから，$dQ = \rho dV$ である．[ステップ3] は dQ を体積 V に渡って足し合わせることである：

$$Q = \sum_i \rho(\boldsymbol{x}) dV_i \to Q = \int_V \rho(\boldsymbol{x}) dV. \quad (5.5)$$

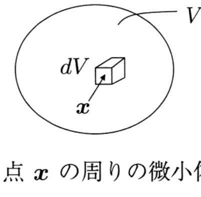


図5.1 点 $\boldsymbol{x}$ の周りの微小体積要素．

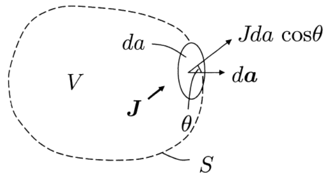


図 5.2　微小面積要素.

実際の問題のほとんどでは，最後の積分は解析的に行えない．そのような場合は微小要素の寄与を数値的に足し合わせて，数値積分の形で答えを求める．積分記号に惑わされるな !!

次に V を包む表面 S を通じて流れ込む電荷を計算する．[ステップ 1] で，表面積 S を微小面積要素に分割する．図 5.2 のように，その微小表面を da で表そう．[ステップ 2] は da を通じて単位時間の間に流れ出る電荷を計算する．電流密度を $\boldsymbol{J}$ とすれば，da の $\boldsymbol{J}$ に垂直な成分は $da\cos\theta$ であるから，単位時間に流れ出る電荷 dq は $Jda\cos\theta$ である．ここで $J=|\boldsymbol{J}|$ であり，θ は da に垂直な方向と $\boldsymbol{J}$ の角度である．微小面積要素をベクトル $d\boldsymbol{a}$ で表すのが便利である．このベクトルの大きさは da，方向は da に垂直な方向である．（方向は体積 V の内側から外側に向くようにとるのが慣例である．）すると $dq=\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{a}$ である．ある面では電荷は流れ出て，ある面では流れ込むであろう．[ステップ 3] より，全流出量は

$$\int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{a} \tag{5.6}$$

である．**ガウスの定理**によれば，(5.6) は体積積分に変換できる：

$$\int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{a} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{J}\,dV.$$

ここで V は S に囲まれた領域の体積である．

(5.5) の電荷 Q の時間変化は流出量 (5.6) にマイナスをつけたものに等しいので，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,dV = -\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{J}\,dV.$$

電荷密度場 ρ と電流密度場 $\boldsymbol{J}$ の空間分布が滑らかならば，$V\to 0$ の極限での積分は，その領域の代表的な点で計算された量に体積 V を掛けたもので近似できるので，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0 \tag{5.7}$$

と微分形で表される．この式を**電荷の連続の式**と呼ぶ．質量などの他の物理量に対しても同様の表現が可能である．

> **問題 5.1**　マクスウェルの式は電場の保存則を満たしていることを示しなさい．

解答　(5.1) を時間で微分した式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

に，(5.4) の発散を取って得られた式

$$0 = \mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{J} + \mu_0\varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

を代入すれば，(5.7) が得られる．■

5.2 ガウスの法則

電場はいかにも水源から湧き出す水の流れのようにイメージできる．水源の強さは水源を囲む面を通り過ぎる流体の量と等しいように，電場の源（電荷）はそれを囲む面を通り過ぎる電場の束（**電束**と呼ぶ）の和に等しい．これを数学的に表現するのがガウスの法則である．

> **問題 5.2**　ガウスの法則を導き，それから任意の電荷分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ に対する電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ を求めなさい．

解答　(5.1) を体積 V に渡って積分しよう．dV を両辺に掛けて，積分すると

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

ここで左辺にガウスの定理を適用しよう．体積積分は表面積分に変換され，

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{5.8}$$

これを**ガウスの法則**と呼ぶ．表面 S を通り過ぎる電束は，S の内に含まれる電荷の総量を ε_0 で割ったものに等しい．

原点に電荷 q を置くと，原点の周りで回転対称であるから，電場ベクトルは動径方向にしか依ら

ない．原点から水が湧き出して四方に等方的に流れ出るようなものである．(5.8) での S を原点が中心の半径 r の球面とすれば，電場 $\boldsymbol{E}$ と微小面積要素 $d\boldsymbol{a}$ は互いに平行であるので，表面積分は $E(r)4\pi r^2$ である．したがって

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{5.9}$$

である．いろいろな点に電荷があれば，電場はそれらの**重ね合わせ**として表すことができる．点 $\boldsymbol{x}'$ に電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x}')$ の電荷があれば，微小体積 $d\boldsymbol{x}'$ の電荷 $\rho(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}'$ による点 $\boldsymbol{x}$ での電場 $d\boldsymbol{E}$ は

$$d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$$

であるので，すべての電荷に渡って足し合わせれば，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\boldsymbol{x}')\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d\boldsymbol{x}'. \tag{5.10}$$

あるいは離散的な電荷 q_i が各点 $\boldsymbol{x}_i$ にある場合の点 $\boldsymbol{x}$ $(\neq \boldsymbol{x}_i)$ での電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|^3}$$

である． ■

(5.10) でナブラ演算子 ∇ を用いた次のような関係

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} = -\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

を利用すると，(5.10) は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}' \\ &= -\nabla\phi(\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{5.11}$$

ここで

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}' \tag{5.12}$$

であり，ϕ を**静電ポテンシャル**と呼ぶ．ベクトル場である静電場より，スカラー場である静電ポテンシャルのほうが扱いやすい．

5.3 ポアッソン方程式とグリーン関数

電荷分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ が与えられれば，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ が (5.11) より求められることが分かったが，別の視点から電場を求めてみる．

マクスウェルの式 (5.3) によれば，定常的な場合は

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$$

である．上の式を任意の表面 S に渡って積分しよう．すると

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{a} = \oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = 0.$$

ここでベクトル解析での**ストークスの定理**を用いている．C は面積 S の周縁の経路であり，$d\boldsymbol{s}$ は C 上での微小線要素ベクトルである．$\oint$ は閉じた経路上の一周積分を表す．(ストークスの定理については次回詳しく述べる．)

任意の閉じた経路に沿った $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$ の和がゼロであるためには，点 P から点 Q までの積分値が

$$\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \phi_{\mathrm{P}} - \phi_{\mathrm{Q}}$$

のように $\phi(\boldsymbol{x})$ の点 P での値と点 Q での値の差に等しければよい．これだと任意の経路を 1 周した積分値は自動的にゼロになる．点 P の座標を $\boldsymbol{x}$，点 Q の座標を $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ とすれば，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$$

である．右辺の第 2 項をテイラー展開すれば，電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{x}) \tag{5.13}$$

のようにスカラー場 $\phi(\boldsymbol{x})$ の**勾配**として書け，(5.11) と一致する．

問題 5.3　静電ポテンシャルと電荷分布の間に成り立つ微分形の方程式（ポアッソン方程式）を導きなさい．

解答　(5.13) を (5.1) に代入すると，$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = -\nabla\cdot(\nabla\phi) = -\Delta\phi$ より，

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{5.14}$$

ここで

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.15}$$

は，第 1 回目にテーマとして取り上げたラプラシアン $\Delta = \nabla\cdot\nabla$ である．(5.14) は**ポアッソン方程式**と呼ばれる． ■

(5.14) の解が (5.12) であることは後者を前者に直接代入すれば分かるが，もっと一般的な方法で (5.14) を解くこともできる．

原点にデルタ関数型の電荷を置いて，次のような方程式を満たす**グリーン関数** $G(\boldsymbol{x})$ を求める：

$$\Delta G(\boldsymbol{x}) = -\delta(\boldsymbol{x}). \qquad (5.16)$$

ここで $\delta(\boldsymbol{x})$ は 3 次元の**ディラックのデルタ関数**で，$\boldsymbol{x}=0$ 以外ではゼロで，$\boldsymbol{x}=0$ では無限大の大きさを持ち，

$$\int \delta(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 1$$

のような性質を満たしている．関数 $G(\boldsymbol{x})$ が求まれば，ポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{\varepsilon_0}d\boldsymbol{x}' \qquad (5.17)$$

として計算できる．

関数 $G(\boldsymbol{x})$ を求める前に，(5.17) が正しい表現であることを示そう．そのために (5.17) のラプラシアンをとれば，

$$\begin{aligned}\Delta\phi(\boldsymbol{x}) &= -\int d\boldsymbol{x}'\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{\varepsilon_0}\\ &= -\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

となり，ポアッソン方程式 (5.14) が導けた．

> **問題 5.4**　(5.16) で定義されたグリーン関数 $G(\boldsymbol{x})$ を求め，それを用いて (5.14) から静電ポテンシャルを求めなさい．

解答　(5.16) のグリーン関数のラプラシアンは原点以外ではゼロであるので，それは第 1 回目の連載で求めた (1.6) と同じものである．ここでは (5.16) をフーリエ変換の方法により解いてみる．フーリエ逆変換[1,2)]

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \widehat{G}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k}, \qquad (5.18)$$

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k} \qquad (5.19)$$

を (5.16) に代入すると，関数 $\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ の直交性から

$$\widehat{G}(k) = \frac{1}{k^2}. \qquad (5.20)$$

$\widehat{G}(k)$ はベクトル $\boldsymbol{k}$ の大きさ k にしかよらないので，引数は k だけである．(5.20) を (5.18) に代入すれば，

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k}$$

である．波数 $\boldsymbol{k}$ の座標を極座標 (k,θ,φ) で表し，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{k}$ のなす角度を θ とすれば，$d\boldsymbol{k} = k^2dk\sin\theta d\theta d\varphi$ であるので，$\cos\theta=\mu$ とすれば，

$$\begin{aligned}G(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\int_{-1}^1 d\mu\int_0^{2\pi} d\varphi\,\mathrm{e}^{ikr\mu}\\ &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr}dk\\ &= \frac{1}{4\pi r}.\end{aligned} \qquad (5.21)$$

したがって任意の電荷分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ によるポテンシャルは，(5.17) より

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}'$$

となり，(5.12) と一致することが確認できる[*1)]．

■

5.4 静電場によるエネルギー

> **問題 5.5**　静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ によるエネルギー密度は $\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2/2$ で表される．これをクーロン ポテンシャル エネルギーの表現から求めなさい．

解答　2 個の電荷 q_1, q_2 が r だけ離れているときのクーロン ポテンシャル エネルギー U は

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}$$

である．もし電荷密度が $\rho(\boldsymbol{x})$ であるとすれば，空間全体での静電エネルギーは，これを拡張して

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int\int \frac{\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x}' \qquad (5.22)$$

である．上の計算では，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ を入れ替えたものが 2 重に取り入れられているので 1/2 が掛けてある．(5.12) の表現を利用して書き換えると

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\phi d\boldsymbol{x} \qquad (5.23)$$

のように変形できる．(5.14) を用いて，(5.23) の ρ を消去すると，

$$\begin{aligned}U &= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \phi\Delta\phi d\boldsymbol{x}\\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int[\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)-(\nabla\phi)^2]d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

*1)　2 次元の場合は $G(r) = -(1/2\pi)\log r$ が導かれる．

第1項はガウスの定理により表面積分になりゼロになる．第2項で $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ を用いれば，

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \boldsymbol{E}^2 dV \tag{5.24}$$

となるので，$\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2/2$ が**静電場のエネルギー密度**である． ■

5.5 コンデンサー

コンデンサーは2枚の極板からできていて，その間は誘電物質で埋められているか，あるいは真空であってもよい．極板に電位差 V をかけると，一方の極板に電荷 Q，他方に電荷 $-Q$ が誘起される．**コンデンサーの容量** C は

$$C = \frac{Q}{V} \tag{5.25}$$

で定義される．

> **問題 5.6**　半径が a と $b(>a)$ の同心導体球からなるコンデンサーの容量 C を求めなさい．

解答　半径が a と $b(>a)$ の2つの同心導体（厚さが無視できる）球面を配置する．極板間の電圧を V としたとき，極板に現れる電荷 Q を計算すれば，(5.25) から容量が求められる．

内側の極板の電圧を0，外側のそれを V としよう．点 $a<r<b$ でのポテンシャルを ϕ とすれば，$\Delta\phi = 0$．ϕ は r だけの関数であるから

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0.$$

解は $\phi = A/r + B$ である．$r=a$ で $\phi = 0$，$r=b$ で $\phi = V$ の境界条件を課すと，

$$\phi = \frac{b}{b-a}\left(1-\frac{a}{r}\right)V \tag{5.26}$$

と定まる．

極板に誘起される電荷を計算しよう．そのためには電場の大きさを知る必要がある．電場は至るところで動径方向を向いていて，その大きさを $E(r)$ と書けば，

$$E(r) = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{ab}{(b-a)r^2}V \tag{5.27}$$

である．半径 $r\,(a<r<b)$ の球面を取り，その上でガウスの法則 (5.8) を適用すると，

$$Q = \varepsilon_0 4\pi r^2 E(r) = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}V.$$

この Q が内側の極板に誘起される電荷である．したがって

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}. \tag{5.28}$$

もし極板の間に誘電率 ε の物質が挟まっていれば，ε_0 を ε で置き換えればよい． ■

> **問題 5.7**　このコンデンサーに電圧 V をかけたときの，静電エネルギーはいくらか．

解答　電場 (5.27) を (5.24) に代入して，空間に渡って積分すれば，

$$U = 2\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}V^2$$

であるが，(5.28) を代入すれば，

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \tag{5.29}$$

が得られる． ■

この表現がすべてのコンデンサーに対して成り立つことは一般的な議論から分かる．コンデンサーの電荷を Q から $Q+dQ$ に増やすのに必要な仕事は，そのときの電位差は $V = Q/C$ であるから，$VdQ = QdQ/C$ である．$Q=0$ から Q まで増加させるのに必要な全仕事は

$$\int_0^Q \frac{Q}{C}dQ = \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2}CV^2$$

であり，これがコンデンサーのエネルギーに他ならない．

充電したコンデンサーを電源として利用することはよく行われ，カメラのストロボがその例である．空のコンデンサーに電池をつないで充電するとき，電池の供給するエネルギーがそっくりコンデンサーに蓄えられるであろうか．

簡単のために図5.3のように容量 C のコンデ

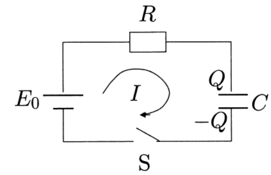


図 5.3　電池によるコンデンサーの充電．

ンサーに起電力 E_0 の直流電源をつなぐ．導線の抵抗を R としよう．するとコンデンサーに蓄えられた電荷を Q，流れる電流を I とすれば，

$$\frac{Q}{C}+RI=E_0. \tag{5.30}$$

時刻 $t=0$ にスイッチを入れると電流が流れ始める．$I=dQ/dt$ を (5.30) に代入すると，その解は

$$I=\frac{E_0}{R}\mathrm{e}^{-t/RC}.$$

エネルギー収支を考えよう．(5.30) に dQ を掛けて，$Q=0$ から $Q=CE_0=Q_0$ まで積分をする．まず電源がした仕事は

$$\int_0^{Q_0}E_0dQ=E_0Q_0=CE_0^2$$

である．コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーは

$$\int_0^{Q_0}\frac{Q}{C}dQ=\frac{Q_0^2}{2C}=\frac{CE_0^2}{2}$$

であり，抵抗でのジュール熱の総和は

$$\int_0^{Q_0}RIdQ=\int_0^{\infty}RI^2dt=\frac{CE_0^2}{2}$$

である．抵抗の大きさに関わらず，電源がした仕事の半分は**ジュール熱**として失われ，コンデンサーの充電効率は 50% にしかならない．

熱力学的には次のように考えられる．このシステムは，電圧が E_0 の電池と電圧が 0 のコンデンサーが平衡になる過程である．それを媒介するのが導線を流れる電流である．しかしコンデンサーの電圧が電池の電圧と大きく異なるので大きな電流が流れてそれがジュール熱損失となる．ジュール熱を小さくするには電源の電圧をできるだけコンデンサーの電圧に等しくして流れる電流を小さくすることである．電池とコンデンサーの間にほぼ平衡状態を保ちながらゆっくりと充電する．一種の**準静的過程**である．すると充電効率は 1 に近くなる．

参考文献

1) 松下貢著：『物理数学』，裳華房 (1999).
2) 初貝安弘：『物理学のための応用解析』，新・数理科学ライブラリ［物理学］8，サイエンス社 (2003).

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）



モウロウたる道しるべ

高橋　大輔

1. 子供時代

研究者としての第一歩がいつ始まったかというのは難しい問いであるが，私の場合は小学生の頃と答えることにしている．小学校低学年のときは母が勉強を教えてくれ，高学年になると父が教えてくれるようになった．どちらもたいへん厳しく，やんちゃな盛りの自分はずいぶん反発した記憶がある．なにしろ，わからないまま放置しようものなら手が飛んできて優しく教えてもらった覚えが余りない．いや，もしかしたら優しく教えてくれたのだが，厳しい場面しか記憶にないのかもしれない．その代わり，わからないことは自分で調べて解決するという癖をこの頃に徹底して身につけた．

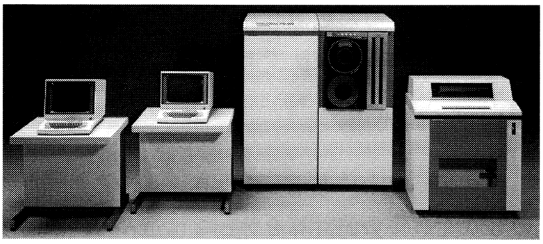
その後のことを考えると，このとき受けた教育がなければおそらく大学に職を得ていないであろう．得ていなければそれはそれで別の人生であるが，おかげで好きなことで食っていけており，その幸せの手がかりを与えてくれたのは両親である．

中高は神戸の一貫制の私立学校に通った．自由度の高い私立のよさを感じて満足していたはずなのに，高校１年で問題を起こし，あわや退学というはめにおちいった．実際退学させようと考えた教師も多かったようである．ところが，住職だった当時の校長のおかげで改悛のチャンスがもらえ夏休みの謹慎だけですんだ．また，担任の数学の先生もたいへん優しく，いいとも悪いとも言わずに見ていてくださった．その後，やっと心を鎮めた自分は気持ちに整理をつけ，１年間ほどの遅れを取り戻すべく以降は勉強に打ち込むのである．私が研究指導する学生の中にも心が折れてしまう子がたまにいる．そのような学生に接するたびに当時の校長と担任を思い出し，元気になるまで黙って優しく包んであげられたらと思う．

2. コンピュータに出会う

東大の理科Ｉ類に入学した後，工学部の物理工学科に進学する．当時は日本の半導体産業が全盛の時代であり，物理工学科を選択したことは自然であった．工学は半田ごてで電気回路を作っているようなイメージが強いが，この学科は非常に斬新で，多くの研究室は工学の泥臭い部分と理学のスマートな部分とを併せ持っていた．物理工学科を選択してよかったと今でも思う．

ところが努力も才能も平凡な私は大学院の入試で第三希望の研究室までことごとく落ちてしまい，当時専攻主任をなさっておられた高見穎郎先生が見かねて研究室に来るかと誘ってくださった．その場で一も二もなくその話に飛びついた私は，卒論のときのレオロジーから流体運動の数値計算へ



ミニコン MELCOM 70 シリーズ モデル 60. © (社) 情報処理学会ホームページ「コンピュータ博物館」.

と一瞬で専門分野を変えたことになる．このように意図しない方法で専門分野を選んだにも関わらず，私は高見研で研究生活の伴侶となるすばらしいモノに出会う．それはコンピュータである．

数値計算のために研究室ではMELCOM 70という三菱電機社製のミニコンピュータを所有していた．ミニとは言え，今のパソコンとは比べものにならない大きさであり，演算処理装置，記憶装置，テープドライブ，プリンタそれぞれがタンスの大きさほどあって狭い部屋に並び，ブラウン管の端末が4台ほど接続していた．それらが出す熱を排出するために背丈よりも高い空調機が，ガーッというかなり大きな音をたてて常時動いていた．こういう環境を収容するために，部屋はブラインドで遮光し鉄の扉で防音を施して夏でも寒かった．当時はクーラーがまだぜいたく品の部類であったので，夏場その部屋で作業をしていると最初は快適である．しかしそれも保って小一時間であり，そのうち冷えすぎてしまう．今の自分なら，完全防寒をし耳栓をしないと耐えられないであろう．

しかし，修士1年で研究室に来たばかりの私にとって，このコンピュータ室は衝撃であった．コンピュータはまだ一部の人のものであり，授業ではパンチカードしか使ったことがなく，その実体がよくわかっていなかった．部屋のコンピュータは大きいとはいえ一目で見渡すことができ，自分が端末で入力すると何がどう動くのかがよくわかる．世間でなにやらすごそうと評判のコンピュータとはこれのことか！ という感じである．

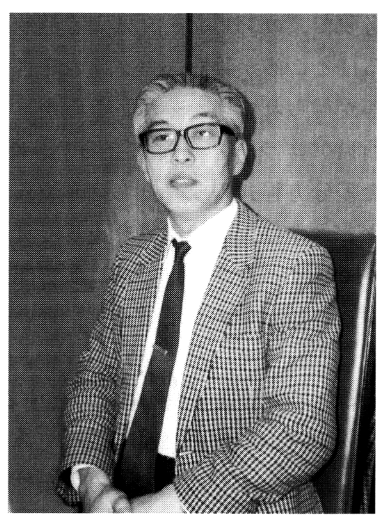
そして，最初はまさにブラックボックスとしか感じられなかったものが，プログラムを作って実行しているうちに，人が人のために作ったたいへん素朴な機械であるとわかり，猛烈に愛おしくなった．できの悪い自分に，もっとできの悪い子分ができたような気分であり，毎日マニュアルを飽きもせず読みあさり，いろいろな使い方を覚えた．

3. コンピュータに教わる

高見研は流体運動の数値計算が専門である．したがって流体運動を記述する偏微分方程式を理解し，しかもそれをコンピュータで解く技を身につけなければならない．コンピュータ自体の動かし方は理解したとはいえ，偏微分方程式とは何なのかもさっぱりわからない私にとって，さらにコンピュータに解かせるのは魔法としか思えず，さぞかし高度なことをするんだろうなというのが第一印象であった．

そこで，高見先生に何を勉強すればいいでしょうかとおそるおそる尋ねると，流体力学の参考書として今井功先生の『流体力学 前編』(裳華房) を，流体の数値計算の入門として川口光年先生の簡単な日本語の解説記事を紹介してくださった．そして，この2つは私の脳みそに革命をもたらすのである．

流体力学は連続体とはいえ力学であり，非常に基本的な物理法則から方程式が導かれ，さまざまな現象がその方程式の解として説明できる．今井



高見先生．

先生の本は結果にたどり着くまで必要最小限の道筋に沿って書かれており，数学の部分も明快であり，私のような落ちこぼれにとって最適の書であった．微分積分，ベクトル解析，複素関数，特殊関数などなど，それまで頭を悩ませていた数学が流体の中で生き生き活躍している．パズルあるいはゲームとして面白がっていた数学に，世界の記述言語としての役割があるということを強烈に意識した．

川口先生の記事はさらに衝撃的であった．微分しないのに微分方程式のイメージがつかめるのである．たとえば微分 $f'(x)$ は差分 $(f(x+h)-f(x))/h$ の $h\to 0$ の極限として定義される．すると，たとえば $f'(x)=f(x)$ という方程式の左辺の微分項を上記の差分に置き換えて整理すれば $f(x+h)=(1+h)f(x)$ という漸化式（数列）が得られる．h が小さいとき，漸化式の解は元の微分方程式の近似解になっている．このような考えを大々的に推し進めていけば，流体の運動を記述する偏微分方程式は連立の漸化式に化け，四則演算だけで方程式を眺めることができる．四則演算なら小学生の頃からお手のものであり，数学的にミステリアスな部分がほとんどない．これにより，なぜ初期条件や境界条件が必要なのか，ラプラシアンとはどのような演算か，非線形方程式はなぜ難しいのか，などなどいろんなことが一挙にわかった．

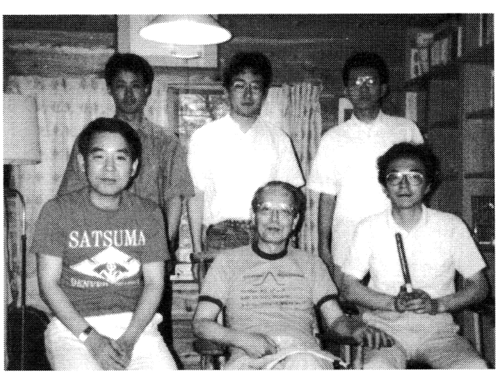
しかも，この手の差分方程式を解くには膨大な計算が必要で，コンピュータによる数値計算が必須となる．ところが雑なプログラムを書いてはまともな答が得られない．それどころかコンパイル時や実行時にエラーだらけになる．したがって，得られた差分方程式の成り立ちをちゃんと理解しているかどうかは，数値計算を正しく実行できるかどうかで自ずとわかる．これは演習問題を解くよりもずっと厳しいテストであり，たいへんいい修行になった．

今でも新しい方程式を理解しようとするときに，プログラムを書いて解の挙動を調べてみることが多い．コンピュータではいろいろな条件をすぐに試すことができ，グラフィカルに解の様子を把握できる．もちろん数値計算にも制約が多いが知っておいて損はない技法である．

4. 助手時代

高見研で博士に進学したとき，ミルククラウンの3次元直接数値計算をテーマに選んだ．理由は単純かつミーハーで，成功のあかつきにはおそらく世界初の計算例になり，結果が見た目にもかっこいいからである．ところが，この研究を成就させようともがいていたある日，東大に着任されたばかりの薩摩順吉先生に呼ばれ，研究室の助手にならないかとの打診を受けた．専門分野はソリトン理論だそうである．実はそのときソリトンのソの字も知らなかった．が，落ちこぼれの自分にはとうてい来ないと思っていた大学の教職が目の前にぶらさがったのである．

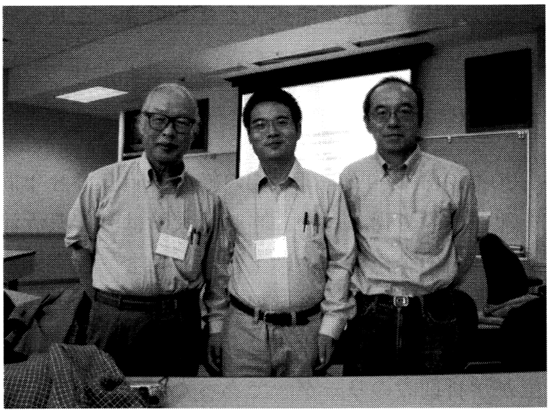
まあ何とかなるだろうと，確か数日おいてからよろしくお願いしますと返事を差し上げた．今度は高見研のときと違って移る先の分野をよく知らないまま決めてしまった．しかも，今取り組んでいるミルククラウンで博士論文を書きたいので，ソリトン理論は残りの時間で勉強していいだろうかとお願いしたところ，先生は構わないとおっしゃる．こんな虫のいい話をした自分の厚かましさが今では恥ずかしく，それを眉一つ動かさずに了解された先生の度量には恐れ入る他ない．結局，そんな虫のいい二足のわらじがうまくいくはずもなく，1年ほど経った後，先生に「もうええやろ」と助け船を出していただき，流体への想いを完全に



前列左から薩摩先生，戸田盛和先生，筆者．

断ってソリトンに専念することとなった．

ところがソリトン理論はソリトン理論で難しい話がいっぱいであり，ちっともよくわからない．人気の研究室として後輩がどんどん入ってきて，私は歳だけは先生の次というダメ助手として君臨することになる．でもまあメシのタネは尽きることもなく，学会や研究会で研究発表をしているうちにいつの間にかソリトン業界で自分の居場所を見つけられるようになった．面の皮の厚さと辛抱はともに肝心である．



左から広田先生，Bao-Feng Feng 先生，筆者．

5. 箱玉系との出会い

博士論文はマグマソリトンに関する研究をまとめて仕上げ，その後しばらく次の研究テーマを模索していた．ある日，薩摩先生がゼミでソリトンのような振舞いをする0と1だけで構成された2進デジタル系の論文を紹介された．どうやら純粋なソリトン系ではなく，初期値によってはソリトン的な相互作用をする場合があるという系である．

当時知られていたソリトン方程式は微分方程式あるいは差分方程式の形をしている．そこへすべてが整数値で記述されたデジタルソリトンの話が飛び込んできた．流体時代にコンピュータで偏微分方程式の意味をつかんだ私にとってこの話は非常に興味深かった．部屋に戻って0と1のゲームで純粋なソリトン系になるようなものは何かないかと考えてみた．0を何もない場所と思い，1を粒子と思って，適当に並べた1を動かしてみよう，ソリトン系は保存量が大事だから1の生成消滅はなしで…という具合に時間発展ルールを考えてみた．そして今では箱玉系と名付けられている2進ソリトン系を思いついた．世界初のデジタルソリトン系の誕生である．

最初のうちは，こんな簡単な構成の系は既に発見されているであろうと思った．しかし，文献調査をしてもどうやらないようである．自分のような落ちこぼれにも神様はやるべきことを残しておいてくれたのだという感謝の気持ちが素直に湧いた．また，ゼミで薩摩先生があのお話を紹介されなかったら私は考えようともしなかったであろう．このあたりは運を感じた．

ところが，神様は当然のことながら試練も与えてくださった．すべてのソリトン方程式は佐藤幹夫先生の理論によって方程式の系列の中に収まるはずである．そして，微分や差分のように離散度合いの異なるソリトン方程式も，連続極限などによってお互いに関連を持っている．業界のこの常識に照らすと，見つけたデジタルソリトン系についても既知のソリトン方程式と必ず結びついているはずである．その関係とは何か，という問題が試練である．

そもそも既成の理論がよくわからないのでデジタルソリトン系に逃げたつもりなのに，その関係とは何かと問われても，ダメ助手の私にわかるはずもない．この後，別の人によって解答がもたらされるまで，何と5年もの間，答を求めて放浪ならぬモウロウの研究生活を強いられる．

この苦しい5年間の救いの神は広田良吾先生である．ソリトン理論の黎明期から広田の方法で大活躍されている先生は薩摩先生と親しく，私にもよく声をかけて下さった．箱玉系発見以降は学会や研究会でお会いするたびに「何か新しいことは見つかりましたか」とニコニコしながらお尋ねになる．この大先生の期待に応えなくてはというのが励みになり，発表の機会が近づくごとにあせって箱玉系の拡張を考えていた．面白いもので，箱と玉によって系を定義したのが正解で，箱を大箱にする，玉に番号を付ける，などといった非常に

わかりやすい拡張がすべてうまくいき，どれもが純粋なソリトン系であった．

6. 青雲の龍谷大学

20代の終わりから30代の終わり頃まで8年間を龍谷大学で過ごした．当時，大学は滋賀県大津市に瀬田学舎を作り，理工学部と社会学部を新設したばかりである．私は理工学部数理情報学科に創設2年目から参加することになる．山口昌哉先生が学科創設のリーダーであった．着任するとまだ学部1, 2年生しかおらず，大学院は存在していない．この状態は大学人としてめったにない経験である．

山口先生，寺本英先生，高木修二先生など重鎮の先生方の暖かいまなざしの下で，若い世代が自由に学科の細部を決めていった．ついこの間まで助手だった自分も学科や大学のあり方について会議でとうとうと意見を述べるのが当たり前の雰囲気であった．当時の理工学部は創設の若々しいエネルギーとともに，京都大学や大阪大学出身の先生方が醸し出す関西人の率直な気質であふれていた．

数理情報学科は数学とコンピュータのバランスがうまくとれた応用数理系の学科であり，出自の異なる教員が混在していた．また，学外からの講師を招く資金も豊富に供給され，自分の専門と異なる多くの人々と交わることができた．この時期の交流は今でも財産となっている．ただ，このときに強く感じたのは，数学，物理，工学それぞれの出身の研究者のお互いの歩み寄りにも関わらず，埋めるべくもないセンスの違いのようなものである．三つ子の魂百までと言うが，大学の学部時代の教育とはここまで人を律するのかと恐ろしくもあり，感動的でもある．たとえば，「数学というのは道ばたで出会った誰にでも説明できるものである」などとよく言うが，誰にでもという部分は数学者なら誰にでもという但し書きが必要ではないか，などと思ってしまう．物理や工学も然り．

7. 超離散化誕生

この龍谷大学時代に自らの研究も大きく進展する．箱玉系以外にデジタルソリトン系は存在しないのだろうかというのがその頃の長い間の疑問であったが，なかなか答が見いだせなかった．ところがある日，箱玉系のルールを記述する式をひねくっているうちに，時間1階空間1階の差分方程式がぼんやり見える瞬間があった．ソリトン理論では時間2階空間2階の有名なソリトン方程式として戸田方程式があるのを思い出し，箱玉系を戸田方程式のように2階に拡張できるのではないかと思い至った．面白いことに，そう思い至った時点で，空間差分に含まれている今までよくわからない非線形項が指数関数に見え，後に判明するがそれは正しい見え方であった．こうして現在では超離散戸田方程式と呼ばれるデジタルソリトン系を得ることができた．長い間ひとつしかなかったヒントがふたつに増えた瞬間である．

ひとつでわからないこともふたつあると比較が可能なので，一挙に情報量が増える．ところが，ここまで肉薄していながら，トロい本人はそれでもわからない．答はある日，学科会議で隣に座った松木平淳太先生から「高橋さん，わかりました」という言葉とともにもたらされ，差分ソリトン方程式に対して簡単な極限を施すことが答であると知らされた．これも面白いことであるが，ほぼ同時期に東大でも時弘哲治先生が独立に同じ答えに到達されていた．しかも，元となる差分方程式は広田先生が1970年代にすべて発見されていて，その式にちょちょっと加工すればよかっただけなのである．

すべての独立変数が離散的なことをfully-discreteと英語でいう．ところが我々の見つけた過程は，それに上乗せして従属変数をも離散化する．これによってそれ以上離散化する変数がなくなり究極の離散化となるが，fullyという言葉が既に使われてしまったので，ultradiscreteという呼び方が考案され，日本語は超離散化となった．

長年求めていた答が人からもたらされたのであるが，悔しい気持ちが不思議と湧かなかった．何と言っても最初の問題提起は自分であり，答がわかったので一人ぼっちでうろうろしなくてすむの

である．この超離散化の第一報は，時弘，松木平の両名に，薩摩先生そして私の4名の連名の論文にまとまった．研究者になって初めて手応えを感じる結果の到来であった．

8. その後の超離散化

超離散化自体は非常に簡単な極限公式を使うだけであり，他の系への応用がすぐに可能である．別の見方をすると四則演算を別の演算に取り換える操作になっている．したがって本来は汎用性が非常に高いはずのところが，well-definedであるための条件があり，それが汎用性を損なっている．そのことは逆に，新しい適用例を発見するためには職人芸的な技法を必要とすることにつながって面白いとも言える．

手法が見いだされて以降，続々といろいろな研究が行われる．興味深い例として西成活裕先生の交通渋滞への応用的研究があり，Burgers方程式の超離散化によって数理モデルがもたらされる．このモデルの性質の証明には私も共同研究者として参加している．値が0，1の二進デジタル系であるにも関わらず，連続系の代表である微積分学の手法を超離散化によって移植し，初期値問題を微積分学的に証明するのである．この経験は非常に新鮮で，量子力学における粒子の二重性と同様の現象が方程式に対して数学的に実現したことになる．もっと妄想をふくらますと，デジタル微積分学とでも呼ぶべき新しい学問領域の台頭が予感される．

また，超離散化の基本公式は統計力学における低温極限の公式とも読め，量子系の低温極限で現れる結晶基底によっても箱玉系が表現できる．さらに，最近ではトロピカル幾何という面白い名前の幾何学と超離散化とはかなり同じものを指していることが判明した．このように，物理や数学の特定の分野と密接にからみながら超離散化が提供する世界はどんどん拡がっており，粉体やコンピュータなど離散系への工学的応用の可能性も非常に期待される．

連続，離散という言葉をアナログ，デジタルに置き換えてみると，現実の世界の技術的実現としてはアナログを廃してデジタルに移行しているように見える．しかしながら，脳の情報処理では物理化学的過程を基本としたアナログ部分と，記憶や思考などのデジタル部分とがうまく混在している．今世紀最大のテーマの一つである脳に超離散化が使えるのではないかとひそかにネタを模索中である．

9. おわりに

時間の流れに従うと，この後は早稲田大学の教員時代ということになるが，まだリアルタイムな職場であるので省略する．仕事においても人生においてもフラフラしながら歩んできて，タイトルにあるような「道しるべ」は今の自分が最もほしいものである．そもそもこの職業には不定形の物事が多く，教育と研究，職場と自宅，過去と未来などがごっちゃになっている人が多いのではないだろうか．しかも自らの研究についても，内容を明確に定義できた時点でその研究は終わる，あるいは，終わりに向かって進み始めるので，あいまいな状態こそハッピーなのである．

このようなモウロウとした業界において，天才型から努力型まで，紳士淑女から奇人変人までいろいろな人物が日々オタクな研究に励んでいる．それが業界の魅力の源でもあり，道しるべは実は彼ら一人一人であり，自分もそのうちの一人なのだと思うことにしている．学問は人のものだから．

（たかはし・だいすけ，早稲田大学理工学術院）



数学の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第8回

教育と研究
過去から未来へ

森田　康夫

1. 序

現在私たちは豊かで文化的に暮らしているが，これは人類の長年の努力の成果を享受できているからである．

振り返ってみると，私たちは数百万年前にチンパンジーなどと別れ，人類としての道を歩み始めた．その際に決定的であったことは，直立歩行を始めたことであり，その結果，手を使って道具を使うことができるようになった．また，百数十万年位前に火を使うようになり，それにより食料を効率的に消化できるようになり，消費カロリーの大きな巨大な脳を持つことが可能になった．このように進化した結果，始めは草原で逃げ回っていた人類は，この頃には地上の覇権を握るようになった．

さて，人類がこのようにして進化して現在に至る中で，10万年くらい前にホモ・サピエンスが現れたことは決定的な出来事であった．ホモ・サピエンスは，生物学的には先立つネアンデルタール人とあまり変わらないように見えたが，繰り返す氷河期の中で数百万年をかけてゆったりと進歩してきた人類は，これを契機として進化の道を疾走し始める．ホモ・サピエンスは，ネアンデルタール人などを地上から駆逐し，約2万年前に最終氷河期が終わった後に，狩猟生活から農耕生活に移行した．さらに，数千年前には古代文明を作り上げ，貨幣経済や土木工事を始め，それに必要な算数・天文学などを発明した．これ以降も，私たちホモ・サピエンスは進歩を続け，ルネッサンスや産業革命を経て，科学技術を基礎とした豊かな現在社会を築いた．

さて，人間のみではなく，チンパンジーなどの類人猿も道具を使うことができる．彼らは，一匹が道具を使って便利な生活をするのを見ると，他の猿もそれを真似し，「道具を使う」という文化が群れの中に広がっていく．初期の人類も同様のことを繰り返したものと思われ，その結果，色々な道具や火を自由に使えるようになったものと思われる．しかし，人類は言葉を話すようになり，一人の人が発明したことを集団の他のメンバーに効率的に伝えられるようになった．そのため人類は，様々な発明を積み重ね，文明を起こすことができた．

文明の誕生と共に，色々なことを効率的に伝えるため，ほとんどの古代文明では文字が発明され，それにより一人一人の発明の集合体である文明を確実に後世に伝えられるようになった．また，文明の誕生とともに，組織的に若者を教育することが始まり，構成メンバーの資質が上がり，文明の発達がさらに加速することになった．

2. 教育とは？ 研究とは？

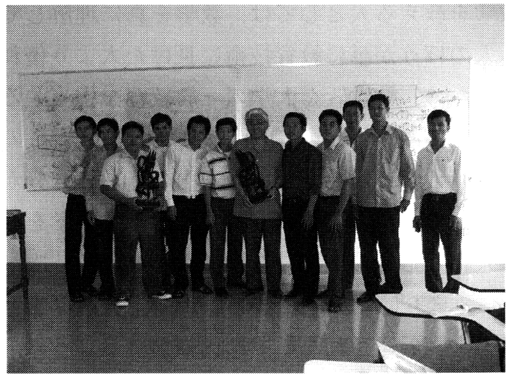
広辞苑によると，文明とは，都市ができ，生産が向上し，生活水準が上がった状態を言うようである．これに対し文化は，衣食住をはじめ技術・学問・芸術・道徳・宗教・政治など生活形成の様式と内容とを含み，文明と非常に似ているが，西洋では人間の精神的生活に関わるものを文化と呼ぶ．

私たちの立場からは，個々人間の様々な発明・発見を蓄積したものが文化であり，都市を中心として文化が発達して豊かな生活ができるようになった状態が文明である．したがって，私たちが豊かな文化的生活を送るためには，色々な発見や発明を積み重ねていくことが大切になる．

文明の質を上げるには，構成員の能力を向上させることが必要になる．そのため，今まで知られている有用な知識を普及し，人材を育成するため教育が始まったが，このようにして始まった教育は，同時に，必要な知識を次世代に伝える役割をも担った．

さて，知識の蓄積が大きくなると，体系化することが大切になる．体系化が進むと，どのような発見や発明が大切であるかが分かるようになり，そのため目的意識を持って未知の事実を調べられるようになる．その結果，私たちの身の回りにある疑問について調べ，解明を目指し真理を追求すること，つまり研究が行われるようになる．高度な知識を扱う大学は，インド，アラビア，ヨーロッパなどで中世に始まったが，科学技術の有用性が明らかになった産業革命の頃から，大学教育が市民の間に普及した．

上にも述べたように，文明とは，私たちの真理を知るための努力を積み重ね，教育により普及し，研究成果を実用化して築き上げられたものである．私たちの文明をより高めるためには，私たちの知識をさらに広げ，深め，実現する必要があるが，そのうち知識を普及し次世代に伝える行為を「教育」と言い，真理の発見と関係する新しい知識の獲得を「研究」[*1]と呼び，色々知られている知識を組み合わせて新しいものを実用化することを「開発」と呼ぶ．これらの均衡を取りながら発展させることにより，文明はより高い段階に至ることができる．



プノンペン王立大学での集中講義．

社会にとって，現存する知識を普及し，有能な人材を育成し，知識を後世に伝える教育は非常に大切である．そのため国は教育を担当している教員を支援している．

これに対して，研究は「真理の探究」という性格が強く，それが我々の生活の向上につながる保証はない．他方，真理の探究の結果，それが応用され我々の生活の向上につながったことは，歴史上数多くある．したがって，研究に対する援助は先行投資と考えるべきであり，教育ほど確実に成果を生むとは限らないが，援助する対象を誤らなければ高い収益が得られる．そのため，先進国の政府は研究に対しても大規模な援助を行っており，発展途上国でも先進国となるため研究支援を行っている国が多い．

では，色々ある学問の中で，数学者が多くの国で大学の教員として大切にされている理由はなぜであろうか？

数学は自然法則を記述する言語であり，科学技術を応用するためには，数学が必要になる．そのため，社会が科学技術を使おうとすると[*2]，数学が使える人が必要になる．ところが大学レベルの

---

*1）研究は文化のレベルを上げる所に目的があり，そのためには現在知られていることを良く理解し，今までに知られていないことを積み重ねる必要がある．現在社会において，そのような環境を確保するためには，研究情報を知る専門誌を読める環境や他の研究者と話し合うための旅費が重要になる．

*2）最近は，金融工学などでも高度な数学の知識が必要となっている．

数学を教える人としては，数学を真に理解している人のほうが単に教育技術に長けた人より優れているため，数学者を大学の一般教育を担当する教員として使うことがよく行われている*3)．このように，数学者が必要となる理由のうち最も分かりやすいのが，大学の教養教育において数学を教える人材としての価値である．

これよりは分かり難くなるが，微分積分学を使って力学が記述されたことに代表されるように，新しい科学が研究される前には，それを記述するための新しい数学が必要となることが多い．しかも，力学の場合には，数学の研究と力学の研究が平行して行われたが，相対性理論に必要な非ユークリッド幾何学や，量子力学に必要な無限時空間の理論や統計学は，数学の研究がかなり先立って行われている．言い直すと，科学技術に使われる数学は，使用目的を考えることなく，数学としての面白さを動機として研究されていることが多い．しかし，結果的には，優れた数学の研究は，長い目で見ると科学技術の進歩に役立つことが多く，人類の生活を豊かにすることが多い．そのため，先行投資として，社会は数学の研究を大切にしているのである．

注意すべきことは，数学の革新的研究は数十年応用に先立って行われることが多いため，それがどのように応用されるかは誰にも分からない．したがって，数学の研究を支援する場合には，すべての分野の研究を支援するのが良く，また，数学としての面白さを研究評価の基準とするのが原則である．日本や発展途上国では，「応用数学のほうが純粋数学より役に立つ」という誤解があるが，数学を科学技術で使う場合には，中途半端な応用数学についての知識より，純粋数学についての深い理解のほうが役に立つ可能性が高く，また，長い目で見ると何が「応用数学」であり何が「純粋数学」であるかもはっきりしない*4)．

私は，科学技術を社会で応用する場合に最も役に立つ数学科の卒業生は，数学全体について広い知識を持ち，数学の一部の分野について専門的な深い見識を持ち，しかも，実社会の中の問題にも強い興味を持っている人ではないかと思っている．欧米で数学の実社会への応用を主導している人たちも，同じ意見を持っているようである．

3. 研究者としての適性

以上に説明したように，研究とは新しい真理を発見するための作業である．したがって，研究者には「現在知られていないことについて考え，新しいことを発見することに喜びを感じる」という，強い知的好奇心を持つことが強く求められる．また，新しいことを発見するためには，その基盤となる既知の知識を深く理解し，その上で，何を知ることが必要かを考え，時間を掛けて考えることが重要となる．そのためには，高い知的能力が必要とされる．さらに，多くの人が同様なことを考えている中で，自分が先に結果を出す*5)ためには，他人と違った考え方をする能力や，研究のために多くの努力を払う勤勉さ，他人より優れた分析力を持つことなどが求められる．

このような作業を行える人は多くはないため，研究者は社会の平均よりやや多めの収入を与えられることが多いが，例外を除き，研究者の収入は経済界のトップの人よりは少なくなる．したがって，自分が好きな研究ができることに満足し，収

---

*3) 「優れた教育を行うためには，優れた研究者であることが必要である」ということがよく言われる．
実際問題としても，微分可能性，フーリエ展開の可能性，微分や積分などの順序交換などデリケートな数学の問題は，数学者しか理解できず，数学者以外が教えると全体像が見えず，応用するときに問題を起こす可能性がある．
この部分は，数学者が他分野に対して行うサービスであり，他分野の人のニーズを考え，分かりやすく教える必要がある．

*4) 基礎科学の長所は，応用できる分野が広く，世界の流れが変わってもそれに対応できる所にある．しかし日本では，「基礎は欧米に任せ，日本は応用を行う」との主張が世の中の大勢となっていたため，目先の利益が見える「応用」に資源を重点配分し，数学などの基礎科学への投資が少なかった．その結果，世界の先進国が物作りから IT 産業や金融取引に重点を移す中で，新しい分野に必要となる数学の基礎知識が不足し，世界の流れに乗り遅れようとしている．

*5) 研究者は，新しい真理を発見するため他の研究者と競争し，その結果により，地位・給与・研究費などを得る．研究者として生きるには，そのような競争の中で生き残る決意が必要である．数学の研究は，(特別優れた才能を持った人を除き,) 数学を考えるだけで優雅な生活ができる楽な仕事ではない．

入の多寡にこだわらないことが，研究者には必要である．

数学の研究者に限ると，「数学が好きである」ということが共通点としてあげられるが，学問全体にバランスの取れた才能を持っている人，数学に限って特別な才能を持っている人，数学と語学に優れた才能を持っている人など様々なタイプの人がいる．また，数学の世界が非常に美しいため，同様に美しい音楽などの芸術に興味を持っている人も大勢いる．いずれにしろ，数学で成功するためには，数学の問題を自分で納得するまで考えるという習慣が必要であり，定理や公式を暗記するだけではなく，深く考えることができることが重要である．

その他，多くの数学の研究所がある欧米とは異なり，日本では数学の本格的な研究所は数理解析研究所と統計数理研究所しかない．このため，ほとんどの日本の数学者は大学に所属し，研究の他に教育にも携わっている．したがって，日本で数学の研究者となるためには，教育に対してもある程度の興味と適性を持つことが必要となる．

4. 数学者となるための準備

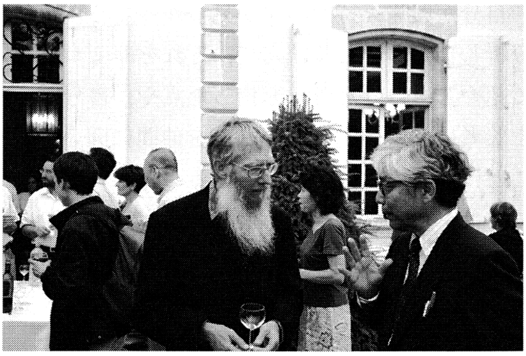
以下では，上記のような適性を持つ人が数学者となるために何をすべきかを述べる*6)．

数学の研究者となるためには，数学研究の最前線を知る必要がある．そのためには，日本では，数学科や数理科学科など（以下では簡単のため，数学科と言う）を出て大学院で指導教員から学ぶのが普通である．そのための第一歩が，数学科に入学し，現代数学の基礎知識を学ぶことである．

数学科では，代数，幾何，解析などの数学の諸分野について学ぶが，講義を理解*7)し，講義についての理解を深めるために演習問題を解き，それ以外にも自分で考える癖を付けることが重要である．

*6)　ガロア（1811–32）のような特別な才能を持った人は他の道を歩んでも成功するし，日本でも例外的な才能を持つ人は何人かいる．

*7)　定理や理論を暗記することではない．定理がどういう意味を持っているかを考え，どのように証明されるかを知り，さらに，どの部分が本質的かを考えることである．



ボルドー大学で．

数学者になった人を見ていると，解析の才能は優れているが代数は苦手である人や，その逆の人など，苦手な数学分野を持つ人もいる．そのような場合には，自分の得意分野を深く理解することが重要で，その分野である程度の研究を行ってから苦手な分野をみると，良く分かることが多い．研究は，新しい真理（数学の場合は，定理や理論）を発見することであり，自分の分野では誰にも負けないことが必要であるが，その他の分野については，それほど多くの知識を必要としないことも多い．

さて，数学科で数学についての基礎知識を身に付けたなら，大学院に進学し，教員の指導の下で数学の最先端の研究について学び，自分で興味を持つ問題を見つけ研究することになる．数学の最先端を知ることは，大学院向けの教科書を読んだり，論文を読んだりすることで達成される*8)．

5. 論文の執筆

最近は，指導する教員から研究テーマを貰い，最初の論文を書くことが多い．しかし私は，学生自身の興味を尊重し，学生に自分でテーマを探させることにしている．具体的には，学生に専門誌を紹介し，それらに載っている論文幾つかに目を通させ，自分が興味を持った論文の結果を改良したり参考にしたりさせて，何か新しい結果が得られないか考えさせることにしている．

*8)　最先端の論文の多くは英語で書かれており，一部はフランス語，ドイツ語，ロシア語などで書かれている．自分で研究論文を書く場合にも，これらの言語で書くことになる．そのため英語についての能力がある程度必要になり，大学に入る前から大学の初年度に，英語を学習しておく必要がある．

自分が興味を持つ論文が見つかったら，それを分析しながら詳しく読んで，それをセミナーなどで紹介し，自分が興味を持った点や，自分がそれを参考にして研究したいことを仲間に聞いて貰うことになる．自分が考えていることを他人に話すことは，自分の考えていることを客観的に見直すことになり，自分自身の理解を深めることになる．また，仲間から貰ったコメントは，自分の研究を進める参考となることが多い．

さて，このようにして自分の研究を深めて行くと，運が良ければ新しいことが見えるようになる*9)．そうすれば，新しく見えてきたことについてさらに研究を進めると，「自分の結果」と呼べるものができる．そこでその結果を自分たちのセミナーで話し，証明を確認して貰い，必要に応じて研究を補う．それを，数学の論文の書き方に従って英語でまとめると，自分の論文ができる．

論文を書くことは，自分が新しい定理を発見したことを宣言することである．指導して貰っている教員に論文の正しさと価値を確認して貰うことも必要だが，最終的には，良い意味でも悪い意味でも，論文についての責任は自分が取ることになる．また，他人に分かって貰うことを目的に論文を書くのだから，推敲を重ね，できるだけ分かりやすい書き方にすることが大切である．

6. 私の場合

私が最初に数学に興味を持ったのは，小学校の高学年のとき図形の面積を求める問題について考え，うまく解けたことを先生にほめて貰ったときである．

その後，中学生になって，数学をよく知っている先生*10)に会い，その先生の指導を受け，問題を解いたり，本を借りたり，NHK の数学講座を聴いたりして勉強をした．当時借りた本のうちには，高木貞治の『代数学講義』などもあり，複素数体が代数的閉体になることの証明など，良く理解できない部分もあったが，興味を持って読んだ．

高等学校に入っても私の数学に対する興味は続いたが，日本の古典や西欧の文学や政治についても勉強した．高校時代には，学校の図書館から本を借り，何百冊も読んだように記憶している．

大学は東京大学だったので，1 年半後の振り分けのときに専門が決まることになっていたが，私は物理を勉強したいと思っていた．私は田舎の高等学校の出身だったので，「研究者とは何か？」について明確な認識はなかった．したがって，「物理を勉強したい」というのは，物理の研究者になるという意味ではなく，取り敢えず物理を勉強したいという意味であった．

大学 1 年のとき，私は上野健爾氏と同じクラスとなり，坂内英一氏・松本堯生氏など他クラスから理学部に進学した仲間や，1 年歳上の斎藤恭司氏などとも出会い，朝永振一郎著の『量子力学』などを輪講した．また，大講義室での授業で，河合隆裕氏とも顔見知りになった．2 年生になってからは，斎藤正彦先生のセミナーを取り，そのレポートを書くためポントリャギンの『連続群論』を読むと共に，1 歳下の柏原正樹氏などにも出会った．

私は，微分積分学を中村得之先生から習ったが，1 学期の期末試験であまり問題が解けず，反省して，教科書として使われていた一松信先生の『解析学序説』を読み直し，その他に，指定されていた微分積分学の問題集を解き直した．特に，演習問題を全部解いたことは，私の解析学に関する力を上げることに役立ち，それ以降，関数の評価が出てくると，喜んで計算するようになった．

このような過程を経て進学振り分けの時期を迎えたが，その頃までには，私は物理ではなく数学を勉強したいと思うようになった．その理由は，その頃までの経験が，物理より数学のほうが多かったのが関係しているように思う．なお，その当時の進学振り分けでは，湯川秀樹先生や朝永先生がノーベル賞を受賞した影響か，物理学科の人気が

---

*9) 論文を書く場合に，最も楽しいのも，最もつらいのもこの部分である．自分で考えた問題が壁にぶつかり，問題の設定からやり直すことも多い．また，問題が解けてもやさしすぎて論文にならなくなることや，得たい結果が得られないことが分かってお終いということもある．

*10) 私の田舎では「部落」が残っており，この先生を初め何人かの部落出身の方が学校の先生として働いていた．そのため，私は普通なら会えない優秀な先生に会う幸運に恵まれた．



高校での出前授業.

非常に高かったが，数学もかなり人気が高く，優秀な人が数学科に集まった.

数学科に進学してからは，授業を聞き色々な数学の本を読んだ．当時の授業は教科書がないのが普通で，小さな声で話す先生や，すごいスピードでノートを黒板に書き写す先生もいたが，非常に整理された授業をする先生もおり，授業の質は玉石混淆であったように思う．先生方は，「3年の授業ではあまりできない学生が，セミナーになると驚くような力を示す」といっていたが，その理由はこのような所に有ったように思われる.

私は，4年で河田敬義先生のセミナーを取り，米国から帰国したばかりの土方弘明先生にS. Lang,『Algebraic Numbers』のセミナーを聞いて戴いた．しかし，土方先生は秋から京都大学に転出したため，秋からは河田先生自身に，A. Weil,『Algebraic Numbers』の原稿のコピーを使ってセミナーをして戴いた．大学院では，土方先生と同じ頃米国から帰国した伊原康隆先生に研究を指導して戴き，修士論文を書いた.

私が4年の頃，東大紛争が起こったが，安田講堂に立て籠もった人を機動隊が排除するということで終わった．私自身は，「権力側にすべての責任がある」という全共闘*11)の主張には同感できず，ノンポリとしての立場を取ったが，それでも同級生の間で様々な議論を行った．そのせいか，大学紛争に出会った年代の人は，社会の利益を重視する人が多いようである．逆に言うと，今の40代の研究者は，自分の研究を非常に大切にするが，「日本社会はどうあるべきか」とか「日本の数学はどうあるべきか」などということは苦手であるように思う.

私は日本の数学科の定員が増えた最初の年に当たり，修士課程を修了して直ぐ助手に採用され，研究者として歩むことが決まった．この点では，今の若い人に比べると非常に幸運であった．しかし，私を含め，同様に修士を出て直ぐ助手に採用された友人の多くは現在まで数学者として活躍しており，数学の研究を楽しんでいる．なお，私は就職が決まらなければ民間に出るつもりであったし，次の人生があれば，別の仕事に挑戦したいと思っている.

7. これから

日本は人口減少期にあり，右肩下がりになりがちです．例えば，日経平均はバブルを境に右肩下がりになっており，世界における日本の存在感も下がっています．今までの「基礎研究は欧米で，応用は日本で」との方針の下，改良を積み重ね，人件費を切りつめ，製品の信頼性と価格で勝負する戦略は限度に来ています．生産性を大幅に上げる必要があり，独創的な研究や製品開発が求められており，そのために必要な大学教育の重要性が増しています.

日本の大学は，「大学入学歴を参考にして優秀な人材を採用し，入社後に力をつけさせる」との企業の方針を盾にして，大学教育の改善努力を怠ってきました．現在でも，大学教員より高校教員のほうが教育技術の改善に熱心です．数学研究者の教育能力の向上が求められています.

（もりた・やすお，東北大学教養教育院）

*11) 全学共闘会議の略．1968年頃からの大学紛争の当時に作られた学生組織で，大学当局への抗議から出発したが，主張が過激化し一般学生から遊離し，大学当局と行政による弾圧で下火となった.

特　集（2009年7月号予告）

現代物理の世界像

素粒子と物性の対話

本体952円

編集後記

今回の特集は方程式を集めたものでしたが，いかがでしたでしょうか．

ラインアップをご覧いただくと，たくさんの方程式があることがわかります．それと同時に人の名前を冠したものが，とても多いと感じられます．

インタビューで和達先生が，偉人伝を読むのが好きだと仰っていますが，今回の記事で挙がっているような人物も調べてみると，当時の文化や歴史など背景が窺えて面白いのではないでしょうか．

音楽を聴く上でも，あまり予備知識を仮定せずに聴いてから，その後，作曲家について調べて改めて聴き直してみると最初のときとは印象が違ってとても面白く感じられることがあります．また，その曲の演奏者について調べても印象が変わってきます．実際に演奏する際にもそういった勉強が必要になってくるようです．

学問においても，ある程度勉強して，行き詰まったりしたら，その分野に関係した人物を調べて，当時の文化や歴史を知るなどして気分転換するのもよいかもしれません．　(R)

数　理　科　学　6月号

2009年6月1日発行

数理科学編集部　　発行人 木 下 敏 孝
TEL. (03) 5474-8816
FAX. (03) 5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

発行所 ⓒ 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474-8500 (代表)
〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1-3-25　振替 00170-7-2387　(03) 5474-8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁